

Communication de  
Monsieur le Professeur, Jean-Louis Clerc



Séance du 22 janvier 2010



Charles Hermite : un mathématicien  
lorrain et sa postérité

A la proposition qui m'a été faite par le Président Robert Mainard de présenter une communication sur Charles Hermite, j'ai répondu positivement et je vous remercie de l'occasion de parler de ce mathématicien. Mon point de vue personnel, et j'encourage tous les scientifiques à l'adopter, est qu'on ne doit perdre aucune occasion de «mettre la science en culture» selon l'expression de J-M. Levy-Leblond, qu'il s'agisse d'en parler devant un public de lycéens ou d'une assemblée d'hommes et de femmes «cultivés» comme la vôtre.

L'exercice est cependant difficile en mathématiques. Les mathématiques ont un statut paradoxal.

Elles ne sont pas une science expérimentale, elles ne portent pas sur un champ particulier du monde réel, et la validation des énoncés est dans la rigueur des démonstrations. Le moteur principal du développement des mathématiques est endogène, autrement dit les mathématiciens s'efforcent de répondre à des questions posées par d'autres mathématiciens. Les constantes de temps peuvent être considérables, comme ce fut le cas pour le «théorème de Fermat», finalement démontré par le mathématicien anglais Andrew Wiles 350 ans après sa formulation par Fermat.

Mais, dans le même temps, les mathématiques sont devenues la «lingua franca» de nombreuses disciplines scientifiques. Le processus, commencé par

la formulation des lois de la mécanique et de l'attraction universelle par Isaac Newton s'est étendu à la plus grande partie de la physique, de la chimie, des sciences de l'ingénieur, et jouent un rôle important en biologie et dans les sciences économiques, voire dans les sciences sociales. Notons d'ailleurs qu'en retour, ces disciplines (c'est particulièrement vrai de la physique contemporaine) posent des problèmes qui relancent la créativité des mathématiciens, nuancant quelque peu l'affirmation concernant le développement endogène des mathématiques.

Cette efficacité des mathématiques se traduit d'ailleurs (et c'est souvent méconnu du grand public) par un rôle important dans l'évolution des technologies : le cryptage des données ou la compression des images par exemple utilisent des algorithmes reposant sur des résultats mathématiques très sophistiqués.

Mais les usages des mathématiques dans ces disciplines sont divers, et réclament un examen critique de leur utilisation. Le recours à des modèles mathématiques n'est pas en soi une garantie de la scientificité d'une discipline, et il faut rappeler l'extrême attention des mathématiciens à préciser les hypothèses de leurs théorèmes, qui seules garantissent la validité des conclusions.

Ces deux aspects, l'un tendant à l'ésotérisme des mathématiques, l'autre au contraire à l'universalité de ses applications rendent souvent l'exercice de communication difficile pour le mathématicien. Il manque aux mathématiques ce qu'est la critique musicale à la musique. Et la comparaison vaut autant pour l'opinion publique que pour les spécialistes.

Je voudrais montrer sur un exemple les ambiguïtés qui peuvent se créer à propos d'une communication en direction du grand public. Vous avez tous entendu parler de l'«effet papillon» :

«Un battement d'ailes d'un papillon au Brésil peut déclencher une tornade au Texas».

Cette affirmation, généralement présentée comme une découverte d'un scientifique sur la météorologie a de quoi surprendre. Si elle est vraie, comment penser en effet que l'on puisse prévoir le temps à quatre ou cinq jours d'intervalle, comme il en est fait état dans tous les bulletins météo radio ou télé diffusés?

En fait, voici d'abord la citation du météorologue E. Lorentz (en 1972). Le titre de sa communication (adressée à un public de scientifiques) est

«Predictability : does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas?»

Et il poursuit [je donne la traduction]

«De crainte que le seul fait de demander, suivant le titre de cet article, «un battement d'aile de papillon au Brésil peut-il déclencher une tornade au Texas ?», fasse douter de mon sérieux, sans même parler d'une réponse affirmative, je mettrai cette question en perspective en avançant les deux propositions suivantes :

- si un seul battement d'ailes d'un papillon peut avoir pour effet le déclenchement d'une tornade, alors, il en va ainsi également de tous les battements précédents et subséquents de ses ailes, comme de ceux de millions d'autres papillons, pour ne pas mentionner les activités d'innombrables créatures plus puissantes, en particulier de notre propre espèce.
- si le battement d'ailes d'un papillon peut déclencher une tornade, il peut aussi l'empêcher.»

E. Lorentz, mathématicien de formation, s'est intéressé à la météorologie, et a été dans les années soixante, un des pionniers de l'utilisation des ordinateurs pour tenter de résoudre numériquement les équations qui gouvernent l'évolution de l'atmosphère. Il s'est rendu compte que des variations infimes des données initiales (par exemple utiliser les mêmes données, mais avec 3 décimales au lieu de 6) avait des conséquences extrêmes sur les solutions, interdisant en pratique toute prévision météorologique au-delà de quelques jours. Il a ensuite voulu comprendre la nature mathématique de ces équations (très compliquées). Sur une formulation simplifiée de ces équations il met en évidence (si l'on préfère découvre) ce qu'on désigne depuis par le caractère chaotique du système, c'est-à-dire l'extrême dépendance des solutions aux conditions initiales. Il choisit un style métaphorique (et quelque peu humoristique) pour rendre compte devant ses pairs de sa découverte. On voit combien la version «grand public» prête à confusion.

«Un peu de sciences pour tout le monde» (C. Allègre) n'est pas un luxe si l'on veut que les citoyens puissent exercer leurs droits sur des questions essentielles pour l'avenir de nos sociétés.

Une dernière remarque d'actualité. La proposition de modifier les horaires d'histoire-géographie (et notamment la suppression de cet enseignement en terminale S) a fait l'objet d'une protestation forte d'intellectuels de renom. Les dispositions analogues concernant l'enseignement des mathématiques (suppressions en Terminale et en 1<sup>ère</sup>) en série L est passée presque inaperçue. La dissymétrie des réactions pose problème, même si, de mon point de vue c'est sans doute dans la remise en cause de la notion de filière que se trouve une solution viable, conciliant un niveau minimum pour tous dans toutes les disciplines fondamentales et des enseignements plus poussés facilitant l'orientation pour la poursuite d'études ultérieures.

## Biographie de Charles Hermite

Charles Hermite est né le 24 décembre 1822 à Dieuze, sixième enfant d'une fratrie de sept. Son père était ingénieur dans les salines voisines, mais finit par quitter Dieuze pour Nancy en 1829. Lui et sa femme reprennent le commerce de drap dans lequel la famille de sa femme Mme Lallemand s'était depuis longtemps investie.

La famille Hermite est une famille aisée, qui veille à une bonne éducation pour leurs enfants. Hippolyte, un aîné de Charles sera Polytechnicien et deviendra officier du génie. Son frère cadet deviendra physicien.

Le petit Charles souffrait d'un défaut dans le pied droit qui rendait ses déplacements difficiles. Charles fit une bonne scolarité à Nancy, et se retrouva au Collège Louis-le-Grand à Paris en 1840-1841. Il eut comme professeur de mathématiques **Louis Richard** qui avait été quelques quinze ans plus tôt le professeur d'**Evariste Galois**. Quoique bon élève, il semble avoir été peu intéressé par les études qu'il était censé faire. Soutenu par son professeur, il commença à lire des mémoires de recherche des mathématiciens de son temps et publia deux articles pendant sa scolarité à Louis-le-Grand.

Il réussit (mais en rang médiocre) le concours d'entrée à l'Ecole Polytechnique en 1842. Après une année passée à l'Ecole, on lui refusa la poursuite de ses études en raison de son handicap physique. Cette décision injuste fut combattue par son entourage, et notamment des mathématiciens qui avaient pressenti à travers ses travaux antérieurs ses immenses possibilités. L'Ecole revint partiellement sur sa décision, mais en imposant des conditions à la poursuite d'études telles que le jeune Charles préféra renoncer.

Poursuivant ses études, il obtint sa licence en 1847, et l'année suivante fut recrutée par... l'Ecole Polytechnique comme répétiteur. Entre temps, il s'était lié avec de nombreux mathématiciens (dont Joseph Bertrand dont il finira par épouser la sœur en 1849). Il se fait reconnaître par le monde mathématique, notamment à travers des correspondances suivies avec Jacobi et Liouville.

En décembre 1845, il envoie une lettre de candidature à l'Académie de Stanislas, lettre conservée dans les archives de l'Académie. Il est admis comme membre correspondant (à l'âge de 23 ans !), les rapporteurs désignés pour examiner sa candidature faisant état d'avis très élogieux de Cauchy et Jacobi et pensant qu'il s'agit d'une décision qui ne peut que bénéficier à terme au renom de l'Académie.

Les dix années qui suivent son recrutement à Polytechnique le voient accumuler les publications : en théorie des nombres, en théorie des fonctions

d'une variable complexe (étude des fonctions doublement périodiques et des fonctions theta) et en algèbre (théorie des formes quadratiques).

En 1856, Hermite est élu à l'Académie des Sciences. L'année 1856 est cependant pour lui une année difficile puisqu'il est gravement malade, atteint par la variole. Sous l'influence de Cauchy, il devient un catholique (et sans doute un royaliste) convaincu. Son résultat principal de la période concerne les équations algébriques du cinquième degré. Contrairement à ce qui se passe pour les équations de degré inférieur, Abel et Ruffini avaient démontré qu'il n'était pas possible de résoudre les équations algébriques du cinquième degré par des radicaux. En 1858, Hermite montre qu'elles peuvent être résolues en utilisant des fonctions elliptiques. Autrement dit, il faut sortir du cadre de l'algèbre et utiliser des techniques d'analyse.

En 1862, sur proposition de L. Pasteur, il est nommé maître de conférences à l'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm.

Dans les années 1870, il retourne à ses problèmes de jeunesse. Il développe des méthodes originales en théorie de la transcendance et obtient en 1875 son résultat sans doute le plus connu : la transcendance du nombre  $e$ , base des logarithmes népériens. En suivant les idées d'Hermite, c'est Lindemann qui démontre en 1882 la transcendance du nombre  $\pi$ .

Commentons ces derniers résultats. Les nombres ont une histoire qui débute avec les entiers, ceux qui servent à compter les collections d'objets. S'ajoutent bientôt les nombres fractionnaires, représentables par des fractions ( $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{22}{7}$ , etc). En parallèle, la mesure des longueurs fait aussi intervenir des nombres, et, une fois choisie une unité de longueur, on peut utiliser les techniques de calcul valables sur les fractions. Le statut des nombres utilisés dans la mesure des longueurs va être questionné lorsque les mathématiciens grecs découvrent par un raisonnement géométrique que la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 a pour carré 2. D'autre part, ils montrent, par un raisonnement arithmétique simple, qu'il n'existe aucune fraction dont le carré vaut 2. La crise dans le monde grec est terrible, et l'on rebaptise nombres rationnels les nombres fractionnaires, les «autres» nombres étant qualifiés d'irrationnels.

Les progrès de l'algèbre, via les Arabes, puis à la Renaissance, notamment la méthode de résolution des équations du troisième degré (Tartaglia-Cardan 1545) amènent les mathématiciens à se familiariser avec les nombres algébriques : ce sont ceux qui sont racines d'une équation algébrique à coefficients entiers, par exemple

$$7x^5 - 9x^3 + 2x^2 + x - 1 = 0.$$

On démontrera plus tard que la somme, le produit ou le quotient de deux nombres algébriques est encore un nombre algébrique, propriétés rendant leur manipulation assez aisée. D'un certain point de vue, ils constituent l'extension maximum de la notion de nombre entier par des méthodes algébriques.

C'est **Leibniz** qui fut le premier à entrevoir l'existence de nombres non algébriques, qu'il baptisa nombres transcendants. Les premiers nombres transcendants furent mis en évidence par Liouville (1844).

Les mathématiciens, et déjà les Grecs, avaient rencontré des nombres qui ne sont pas obtenus par des procédés algébriques. L'exemple le plus célèbre en est le nombre  $\pi$  qui exprime la longueur d'un cercle rapporté à son diamètre (ou encore sa surface, rapportée au carré de son rayon). Très tôt, des valeurs explicites pour  $\pi$  ont été proposés par divers mathématiciens (Grecs, Hindous, Chinois, Arabes, etc). Toutefois, il est clair qu'il ne s'agit pas de la valeur exacte, mais d'une approximation, plus ou moins proche de la valeur réelle. En 1768 **J-H. Lambert** (bien connu des géographes) démontre que  $\pi$  n'est pas un nombre rationnel. Le problème émerge graduellement de savoir si  $\pi$  est un nombre algébrique.

Pour répondre à ce type de questions, Hermite va développer des méthodes d'analyse, plutôt élémentaires, mais très astucieuses. Ce sont aujourd'hui des sources de merveilleux exercices pour les étudiants de licence de mathématiques. Il parviendra à démontrer la transcendance du nombre  $e$ , base des logarithmes népériens, mais c'est **Lindemann** (1852-1939), en utilisant largement les idées de Hermite qui parviendra à démontrer la transcendance de  $\pi$  en 1882. Il en résulte l'impossibilité de la quadrature du cercle, très vieux problème déjà posé par les Grecs. La transcendance est aujourd'hui l'objet de recherches actives, et dans une large mesure toujours inspirées par les travaux fondateurs d'Hermite.

A partir des années 1860, Hermite est pleinement reconnu dans toute l'Europe comme un mathématicien d'une très grande importance. Il correspond avec de nombreux mathématiciens, notamment **Weierstrass** (à qui il voue une grande admiration) et **Mittag-Leffler**. En 1869, il est nommé professeur à la Sorbonne, et promu professeur à l'ENS. Peu après la guerre de 1870, Guillaume II lui propose de devenir recteur de l'Université de Strasbourg, ce qu'il refuse.

En 1890, il est élu président de l'Académie des Sciences. Il ne prend sa retraite définitive qu'en 1897 et décède le 14 janvier 1901.

Son intérêt pour les jeunes mathématiciens ne se démentira jamais au cours des années. Un exemple parmi d'autres est sa correspondance très volumineuse avec Stieljes. Celui-ci est un Hollandais, d'abord ingénieur des eaux, qui se reconvertisse aux mathématiques, et rentre en communication avec Hermite, qui

le conseille et le soutient activement pour la recherche d'un poste académique. Il finira par soutenir une thèse sous la direction de C. Hermite.

Le plus brillant de ses élève est sans aucun doute **Henri Poincaré**, dont il dirige les travaux de thèse, soutenue en 1879. Lors du 70<sup>ème</sup> anniversaire de Charles Hermite, une souscription est organisée par ses collègues et élèves. A cette occasion, Poincaré lui rend un hommage dont je ferai ma conclusion.

*« Ces idées que vous avez semées comme sans y penser, quand nous les retrouvons ensuite, et que nous nous efforçons d'en tirer tout ce qu'elles contenaient, vous seriez tenté d'oublier qu'elles sont à vous. Mais nous, nous ne l'oublions pas ; et ce n'est pas vrai seulement de ceux d'entre nous qui ont eu la bonne fortune de suivre vos leçons. Ceux aussi qui n'ont subi votre influence que de loin et indirectement n'ignorent pas quel en est le prix et sont également pénétrés de reconnaissance. »*

Henri Poincaré, lettre à Charles Hermite pour son 70<sup>ème</sup> anniversaire (extrait).



## Discussion

Le Président Mainard remercie le conférencier pour les deux parties de son très intéressant exposé. Il lui demande si Lindemann aurait pu faire sa découverte sans les travaux d'Hermite et ce qu'il pense de la notion de délai en mathématiques, notion qu'il a évoquée en début de conférence. M. Clerc répond que la percée est due à Hermite, Lindemann s'étant « coulé dans le moule ». Quant au temps, il y a eu une contraction.

M. Flon dit que le cratère Hermite est près du pôle nord de la lune. À propos des problèmes des Grecs, il pense à l'absence de méthodes. M. Clerc pense plutôt à une crise intellectuelle.

M. Larcen remercie le conférencier pour son exceptionnelle clarté. Il revient sur le théorème de Fermat et évoque le roman de J. Daillon. Il parle « d'intelligence mathématique » et de la jeunesse des mathématiciens, de cerveaux différents et de créativité différente pour eux. Il demande s'il s'agit de recherches algébriques ou géométriques, dans le solide ou le plan. M. Clerc pense que les cerveaux sont identiques, mais est d'accord avec M. Larcen pour la jeunesse, sauf exception qu'il explique. Il dit qu'Hermite a apporté des outils autres qu'algébriques.

M. Heinzmann explique les relations avec Berlin et celles existant entre Tannery, Poincaré et Hermite.

M. Rose parle des compositeurs qui ont utilisé les mathématiques ; il cite Bach, Durupt et Xénakis et dit que le plus ancien est Pythagore. M. Clerc y pensait en arrière plan. Il cite les mosaïques arabes où l'on trouve mathématiquement 17 groupes de pavages.

M<sup>me</sup> Dupuy-Stutzmann intervient pour parler de la «bosse des maths» et de l'importance de la pédagogie pour faire aimer une discipline. Elle lit une citation d'Emile Borel évoquant les qualités pédagogiques de Hermite. Dans sa réponse M. Clerc évoque les difficultés récentes du projet de réforme des lycées avec la suppression de certains enseignements, et signale qu'on a à peu près pas parlé de la suppression des mathématiques dans les filières littéraires, projet qu'il considère comme une erreur.

M. Laxenaire envisage les prolongations philosophiques des propos du conférencier et se demande si la théorie du chaos résoudrait le conflit entre déterminisme et liberté. M. Clerc indique que le chaos permet de réfléchir à la notion de causalité : quelle est l'importance d'une petite variation de cause sur la valeur du résultat. Il dit qu'il y a des questions auxquelles il n'est pas possible de répondre et des événements dont la prédiction est impossible si ce n'est en termes de fréquence, mais sans qu'il s'agisse d'une probabilité car ce domaine ne tient pas compte des causes des variations.

M. Perrin revient sur la perversion de la transmission des citations par la communication évoquée à propos de «l'effet papillon» de Lorenz, et sur l'importance des décimales dans les résultats des calculs.

M. Kevers-Pascalis demande à M. Clerc une définition de «e», ce à quoi celui-ci répond avec précision.

M. Clerc ayant évoqué la critique musicale comme un des éléments permettant le développement d'une culture musicale, M. Burgard indique que cette dernière s'appuie aussi sur la musicographie et la musicologie.

Enfin M. Vaucel pense que la proposition du rectorat de Strasbourg pour Hermite était une forme d'ouverture, au sens actuel du mot, d'autant que les mathématiques étaient un des seuls domaines scientifiques où la France dépassait alors l'Allemagne.