Communication de
Madame Marion Créhange

Séance du 18 mars 2016

Musique et Mathématiques

Notre sujet : *les liens entre musique et mathématiques*. Précisons son champ.

- Musique : de nombreux développements seront assez spécifiques de la musique occidentale tonale (basée sur les tonalités). L'accent sera mis sur l'harmonie, dans son sens commun (la beauté et la bonne ordonnance) et son sens technique (l'art de la formation et de l'enchaînement des accords, complément de la mélodie). Je m'intéresserai aussi à la composition, l'interprétation, le ressenti, le plaisir musical,… Il faut noter que nombre de règles en musique ne sont pas absolues – nous sommes dans le domaine artistique – et que de plus en plus de compositeurs cherchent même à s'en échapper ou à les faire évoluer.
- Mathématiques (je dirai "maths") : les domaines concernés sont variés (analyse, intégrales, arithmétique, algèbre des structures, systèmes formels, géométrie, probabilités…) et ne concernent pas uniquement les nombres.
- Mise en correspondance aussi bien directe qu'indirecte (principalement à travers la physique). De l'abondante littérature[1][2] à ce sujet, je n'ai pas tout compris, d'autant plus que les formalismes développés sont souvent spécifiques. En outre, si mon cursus d'études a comporté des maths et que je les ai aimées, je ne suis pas mathématicienne, pas plus d'ailleurs que théoricienne de la musique. Chemin faisant, émergera l'idée que les maths ne sont pas une discipline froide, éloignée de la vie et des arts, mais qu'elles se nourrissent de questions réelles et aident à les mieux connaître et à y

progresser, sans nécessairement les assécher. Il faut noter qu'à la base de tout traitement mathématique du réel, intervient une démarche, elle-même mathématique, d'**abstraction** et de **modélisation**, étape guidée par l'usage que l'on pense vouloir faire de son résultat. L'avènement de l'informatique a stimulé la formalisation des faits musicaux et a donné des ailes aux mathématiques musicales.

Voici mon approche. Les faits musicaux qui peuvent être mis en relation avec les maths sont innombrables ; j'en ai choisi quelques-uns qui me semblent illustrer des aspects divers de ces relations et faire ressortir un bon échantillon de l'apport des maths à la musique, y compris pour proposer des mesures et traitements de certains caractères subjectifs comme la tension, l'émotion, le plaisir. Mon propos est plus conceptuel que précis, quelque peu impressionniste, sans aucun souci d'exhaustivité ni d'égale profondeur. Il ne requiert aucune connaissance en maths (mais il faut cependant s'y ouvrir un peu !) et je ne me place pas sur un plan philosophique.

Et voici le plan que je suivrai : -1: Survol historique des rapprochements entre musique et maths. -2: Du son aux notes et aux gammes. -3: Faire des phrases avec des notes (tonalités,…). -4: Rythmes. -5: Construire des œuvres avec des phrases, formes musicales. -6: Sémantique et beauté. -7: Pourquoi J.S. Bach ? -8: Un mot sur la recherche en *"mathémusique"* et l'IRCAM. -9: Apports de la musique aux maths. -10: Conclusion.

1. Survol historique des rapprochements entre musique et maths

Faute de place, je survole l'historique, qui affleurera quelquefois dans la suite. Il est largement traité dans la littérature, et récemment, par exemple par G. Assayag et J.P. Cholleton[3]. Donnons quelques notions et noms, à la volée. La musique en Grèce antique, liée aux mythes, particulièrement celui d'Orphée, jouait un rôle essentiel et était proche des maths, comme en attestent les théories de Pythagore (-VIe siècle) sur la hauteur des notes émises par des corps vibrants ainsi que sur les relations entre intervalles musicaux et fractions. Le peuple grec a d'ailleurs inventé les concerts, l'enseignement et la notation de la musique. Celle-ci fut considérée jusqu'au Moyen âge comme une science parmi les *arts libéraux*, ce qui est bien illustré par exemple par le magnifique vitrail *Rose des arts libéraux* de la cathédrale de Laon. Voici une simple énumération de penseurs ayant marqué l'apport des maths à la musique par leurs réflexions philosophiques, physiques ou directement mathématiques : Aristote (-384, -322) ; C. Ptolémée (90, 168) ; Boèce (480, 524) ; G. Galilée (1564, 1642) ; J. Kepler (1571, 1630) ; M. Mersenne (1586, 1648) ; P. Gassendi (1592, 1655) ; R. Descartes (1596, 1650) ; Athanasius Kircher (1602, 1680) ;

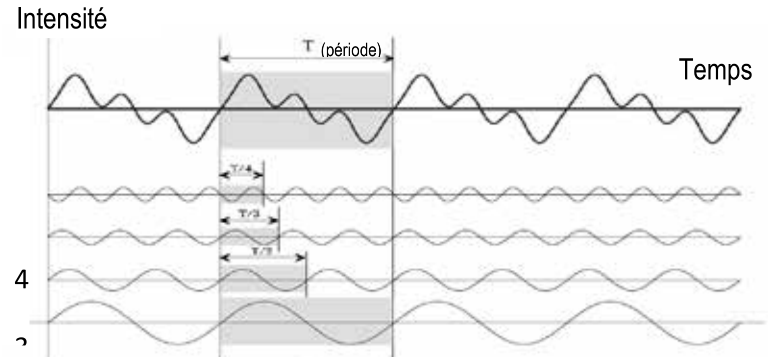
B. Pascal (1623, 1662) ; C. Huygens (1629, 1695) ; J.Ph. Rameau (1683, 1764) ; D. Bernoulli (1700, 1782) ; L. Euler (1707, 1783) ; J.J. Rousseau (1712, 1773) ; D. Diderot (1713, 1784) ; J. le Rond d'Alembert (1717, 1783) ; J.L. Lagrange (1736, 1813) ; H.L. Helmholtz (1821, 1894) ; Ch. Hermite (1822, 1901) ;… Pendant la période où J.S. Bach composait, J.Ph. Rameau rédigeait le *Traité de l'harmonie réduite à ses principes naturels*[4] qui a fixé les bases de la théorie de la musique tonale. On peut aussi mettre l'accent sur Helmholtz qui, avec une remarquable largeur de vues, a donné une explication physique et physiologique des paramètres du son. Au XXè siècle, la remise en cause de la musique tonale a donné aux maths un rôle important, avec des compositeurs comme O. Messiaen, P. Boulez – qui a été son élève –, I. Xenakis. L'IRCAM, créé par Boulez en 1969, a été un accélérateur et un coordinateur et reste le pivot de la plupart des recherches, très bouillonnantes, des *mathémusiciens*, aidées et aiguillonnées par l'informatique. J'y reviendrai.

2. Du son aux notes et aux gammes

Le constituant élémentaire de la musique, c'est le ***son***, manifestation d'une *vibration*. Il est caractérisé par sa *hauteur*, son *intensité* (amplitude de sa vibration), son *timbre*, sa *durée*, son *amortissement*, etc. qui peuvent tous être objets de traitements mathématiques. Par exemple, la hauteur du son émis par une corde est d'autant plus grande que la corde est plus fine, plus tendue, que la partie qui vibre est plus courte, ce qui est aussi le cas pour une colonne d'air. Intervient souvent aussi la vibration *par sympathie*, état de deux corps sonores, dont l'un entre en vibration lorsque l'autre est ébranlé. Ce phénomène (dont on a trouvé trace dès le XVè siècle et qui a été exploité pour la première fois de manière théorique par Descartes) est mis en œuvre dans la plupart des instruments de musique, en particulier le violon (entre les cordes et la table d'harmonie), le théorbe, la harpe, le piano. Des traitements mathématiques du son interviennent dans de multiples applications, comme par exemple la simulation de divers paramètres d'instruments, permettant aux luthiers d'améliorer leurs créations et même d'éviter d'en construire des prototypes matériels (cf par exemple *Pour la Science, N°373*) ; des passionnés ont même modélisé un violon de Stradivarius, y compris les réactions du bois des différents composants, et s'en sont servis pour en construire une copie.

Décrivons les deux représentations principales du son mises en œuvre dans ces traitements, chacune fruit d'une abstraction.

2.1. Le son : Diagramme intensité/temps – Fondamentale et harmoniques – Décomposition de Fourier



Décomposition d'un son non sinusoïdal de période T (fréquence f1 = 1/T) en sa fondamentale (période T) et ses harmoniques n° 2 à 4 (périodes T/2, T/3, T/4) (cf J.L. Migeot)

Son : Un son, dans un laps de temps court, est bien décrit par la *fonction* mathématique qui exprime l'intensité instantanée du signal en fonction du temps ; on peut la représenter par une courbe, comme celle du haut de la figure ci-jointe. Cette fonction est dite *périodique* car elle se répète à intervalle de temps régulier *(période)*. Si par exemple la période de la fonction est 1/50ème de seconde, en 1 seconde le motif répété le sera 50 fois : on dit que la fréquence vaut 50 Hz (pour "Hertz") ; de façon générale, si la période est P, la ***fréquence*** est F = 1/P. Le son est d'autant plus aigu que sa fréquence est élevée. L'étude des fréquences joue un rôle important en théorie musicale et est un bon terrain de jeu des mathématiciens.

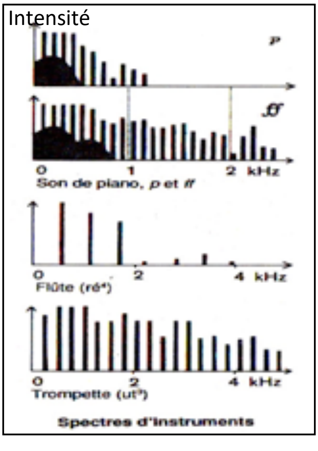
Harmoniques : Lorsqu'on frappe un diapason, il émet un la, de fréquence 440 Hz[a] dont la courbe représentative a une forme ondulante (sinusoïde) ; on dit que ce son est *pur*. Mais en général les sons ne sont pas purs. Le mathématicien **Joseph Fourier** (1768, 1830) a démontré un théorème qui s'est avéré d'un extraordinaire portée en physique et qui s'applique au son : **Tout son périodique est une somme de sons purs**, on les appelle ses ***harmoniques*** (masculin). Ainsi, lorsqu'un instrument ou une voix émet un son, on entend non seulement le son visé mais aussi d'autres sons, moins forts, qui sont ses harmoniques ; c'est cela qui donne une saveur propre – *le timbre* – à des sons émis par des sources différentes (voir §2.2). Les harmoniques susceptibles de composer le son entendu sont les sons purs dont les fréquences sont des multiples de f_1, mais ils n'y sont pas tous présents ; de plus, ils sont de plus en plus aigus et, s'ils sont trop hauts, sortent du domaine audible. Les premiers harmoniques ont une importance particulière. Le 1er a la même fréquence que

P, disons f_1 : on l'appelle la *fondamentale* (cf courbe la plus basse dans la figure). Le 2ème, s'il existe, a pour fréquence $2\times f_1$ et sonne de la même façon que le 1er, si bien qu'on lui donne le même nom ; l'intervalle entre les deux, c'est ce qu'on appelle une ***octave***[b]. Par exemple, si la fondamentale est un la à 440 Hz, le 2ème harmonique sera le la juste supérieur (880 Hz). L'harmonique suivant, s'il existe, a pour fréquence $3\times f_1$. Le suivant, $4\times f_1$; il sonne encore comme la fondamentale et correspond donc encore à une octave (le *la* encore suivant).

Dans la suite, j'ai entouré de signes /* et */ les parties un peu mathématiques que l'on peut passer sans entraver la compréhension d'ensemble.

/* Les mathématiciens expriment le théorème de Fourier par une formule compliquée donnant la valeur de l'intensité du son complexe comme la somme de n termes (n arbitrairement grand) représentant chacun un harmonique, avec des coefficients exprimant l'importance respective des termes. */ Ils se posent des questions au sujet du comportement de la somme lorsque n "tend vers l'infini", de sa stabilité vis-à-vis de modifications des hypothèses, etc. Les informaticiens se posent les mêmes questions, mais aussi celle de trouver des moyens efficaces de calcul. Ce qui est à remarquer, c'est que Fourier n'a pas créé cette théorie à propos des sons mais à propos de la chaleur ; les maths sont un pont puissant entre domaines !

Octave : Revenons à un son pur de fréquence f_1 ; les sons correspondant aux octaves supérieures successives ont pour fréquences $2\times f_1$, $22\times f_1$, $23\times f_1$,… On dit en maths que les fréquences des octaves forment une *suite géométrique de raison 2* car chaque terme se déduit du précédent en le multipliant par 2. Pour raisonner sur les sons, on fait souvent sur chaque son une opération qui consiste à faire abstraction de l'octave réelle où il se trouve, et à le remplacer par son homophone dans l'octave qui commence à la fondamentale, c'est-à-dire dans l'intervalle de fréquences $[f_1, 2\times f_1]$. Cela s'appelle *ramener à l'octave* ou *réduire*. /* Pour cela, il faut diviser sa fréquence par la "bonne" puissance de 2, celle qui l'amène dans cet intervalle.*/



Spectres d'instruments

Quinte : Intéressons-nous un instant au 3ème harmonique, appelé la quinte, qui a pour fréquence $3\times f_1$, qui est en dehors de l'intervalle $[f_1, 2\times f_1]$[c]. Le diviseur qui ramène ce son à l'octave est 2, faisant descendre d'une octave, ce qui donne comme fréquence pour la quinte réduite : $(3/2)\times f_1$. Nous soulignerons l'importance capitale de la quinte.

2.2. Le spectre fréquentiel et la manifestation des harmoniques d'un son : le timbre

Une autre représentation d'un son est son *spectre fréquentiel*, qui représente l'importance de chacun des harmoniques, donc chacune des fréquences, qui le composent. Il exhibe le ***timbre*** propre d'un instrument ou d'une voix, incarnant son caractère, sa saveur avons-nous dit. Analyser un son pour en étudier la répartition des fréquences, se fait couramment maintenant par ordinateur, mais avait déjà été pratiqué par H. von Helmholtz au moyen de son *résonateur* dont il a même étudié le rapport au système acoustique humain. L'analyse du timbre amène à des développements mathématiques et informatiques riches et à des applications comme la reconnaissance vocale, l'étude et la correction des insuffisances auditives. Les normes de compression des enregistrements musicaux, comme MP3, reposent sur l'étude des spectres pour optimiser la perte en qualité due à la suppression de certaines fréquences.

2.3. Les gammes, suites de notes

Parler des sons, c'est relativement simple. Par contre, aussi curieux que cela puisse paraître, la définition précise des notes n'est pas universelle. Une ***note***, matériau de base de la construction d'une pièce musicale, c'est la notation d'un son : lorsqu'on joue une note, par exemple lue sur une partition musicale, on entend un son. En musique tonale, chaque note est vue comme appartenant à une ***gamme***[d] ("série de notes consécutives comprises dans une même octave et qui ont entre elles certaines propriétés de consonance"). Notes et gammes ont fait l'objet de multiples tentatives de définition précise, peu différentes mais dont aucune n'est parfaite. La question sous-jacente est celle de la note *juste et de la consonance* : les diverses cultures et l'évolution des goûts musicaux font que ces notions n'ont rien d'absolu ! Pas question d'entrer dans les détails de chacune des approches de la gamme, mais indiquons les principes des trois principales ; nous verrons que les maths aident à les définir. Les deux premières sont souvent dites "naturelles" car elles reposent sur des phénomènes physiques, la troisième est conventionnelle.

La consonance

La ***consonance*** est la qualité d'un intervalle de notes ou d'un accord d'être perçu comme **agréable à l'oreille**. Cela se produit lorsque les harmoniques de leurs sons se renforcent, se confirment, mutuellement, ce qui est le cas quand les fréquences de leurs fondamentales sont dans un rapport simple (2 (octave), 3/2 (quinte), 5/4, etc.). Un exemple : dans les violons, altos, violoncelles, les cordes à vide ont des écarts d'une quinte, ce qui est utilisé par les instrumentistes pour accorder leur instrument à l'écoute[e]. La consonance et son antonyme, la *dissonance*, jouent un rôle essentiel en musique, bien décrit dans Wikipedia :

« En harmonie tonale, [...] la dissonance est vécue et traitée comme une tension, qui est aussi un moment expressif privilégié, que la consonance, sous certaines conditions, va [...] *résoudre* [...] en apportant la ***détente***. Toute la musique repose sur des rapports de tension » . Nous y reviendrons.

Un peu de maths. Pour estimer le niveau de consonance de deux notes de fréquences f1 et f2, il est intéressant de trouver les fréquences de leurs harmoniques communs : ce sont les multiples communs de f_1 et f_2. Le plus petit de ceux-ci (leur *PPCM*, Plus Petit Commun Multiple) est significatif ; plus il est petit, c'est-à-dire proche de f_1 et f_2, plus le son composite est consonant. L. Euler a approfondi cette idée.

Cette notion de consonance est très culturelle. Si au Moyen âge seuls les intervalles d'octave et de quinte étaient acceptés comme consonants, petit à petit, par certaines audaces des compositeurs, une curiosité des mélomanes, l'ouverture aux musiques de diverses ethnies, l'oreille s'est habituée à des consonances moins parfaites, pour, au début du XX^{e} siècle, accepter et cultiver une liberté de plus en plus large. Cela peut même être observé par l'imagerie du cerveau… Mais revenons aux gammes.

La gamme de Pythagore

Pythagore et ses disciples pensaient que l'harmonie du monde était liée aux propriétés arithmétiques des nombres et que les belles choses étaient représentables par des nombres petits et des fractions simples ; ceci revêtait une valeur philosophique et religieuse. Ils furent les premiers à penser que les sons étaient régis par des nombres rationnels, c'est-à-dire exprimables par des fractions. La *gamme de Pythagore* est basée sur l'excellente consonance des **quintes**. Il s'agit ici, à partir d'un son (le *do* est souvent choisi) de grimper de quinte en quinte (quinte, quinte de la quinte,…) dans la suite des sons, c'est-à-dire, à partir d'une fréquence, de la multiplier par des facteurs successifs 3/2, (3/2)2,…, (3/2)12≈129,75[f]. Au bout de 12 quintes, on constate qu'on retombe presque sur un nombre entier d'octaves (7 octaves, donc facteur 27=128) ; si bien que la note correspondante, ramenée à l'octave, revient à la note de départ. C'est pourquoi on s'est arrêté là ; on peut aussi s'arrêter à 7 quintes, qui amènent près de 4 octaves.

/* Considérons les quintes successives et ramenons-les à l'octave. On obtient respectivement comme facteur (compris entre 1 et 2) : 1,5 ; 2,25/2≈1,13 ; 3,38/2=1,69 ; 5,06/4≈1,27… Chacune de ces valeurs correspond à un point sur l'axe des fréquences donc des hauteurs de notes, entre le *do* initial et le *do* au-dessus. Mais ces points ne sont pas dans l'ordre des numéros de quintes : par exemple la quinte n°4 (1,27) correspond à un son plus grave que la quinte n°1 (1,5). */ On doit donc effectuer un classement des fréquences obtenues, et c'est ce qui définit les *degrés* de la gamme de Pythagore, à qui on a donné au XIVè siècle les noms *do*, *ré*, *mi*, etc. La gamme de 12 notes et son échelle sont qualifiées de *chromatiques*, celles de 7 sont dites *diatoniques*.

L'inconvénient de la gamme pythagoricienne, c'est que la fréquence du 12ème harmonique n'est pas exactement égale à un nombre entier d'octaves (c'est en particulier mathématiquement visible par le fait que $(3/2)^{[12]}$ ne peut pas être pair). Donc l'ensemble des degrés n'est pas reproductible d'une octave à l'autre. La différence de hauteur entre la 12ème quinte et la 7ème octave est appelée le comma *pythagoricien*. Plus généralement, un *comma* est un intervalle très petit, sorte de terme correctif entre deux systèmes de gammes.

La gamme de Zarlino

La gamme que Zarlino a proposée ensuite est bâtie pour tenir compte fidèlement non seulement des quintes mais aussi des tierces, qui avaient entre-temps gagné le statut d'intervalle consonant. Mais, si elle rend plus harmonieuses les tierces, elle a aussi de graves défauts[g].

La gamme tempérée

Les inconvénients des gammes ci-dessus sont devenus rédhibitoires lors du développement des instruments à sons fixes (orgue, piano…) et de la polyphonie. On a donc imaginé la *gamme tempérée*, pour laquelle on a divisé l'octave en **12 degrés équidistants** (appelés ***demi-tons***). On dit que son *tempérament*[h] est *égal*. Par rapport à l'échelle pythagoricienne, on change légèrement les degrés pour que 12 quintes donnent exactement 7 octaves. La *gamme chromatique tempérée de do* est la gamme de 12 notes qui commence à do et monte de demi-ton en demi-ton jusqu'au do de l'octave suivante.

/* Un peu de maths : l'*intervalle* de hauteur entre deux sons de fréquences f_1 et f_2 est mesuré non pas par la différence entre les 2 fréquences mais pas leur **rapport** f_2/f_1 ! Comme monter d'une octave (soit 12 degrés) consiste à multiplier la fréquence par 2, monter d'un degré consiste à multiplier la fréquence par racine douzième de 2 : $\sqrt[12]{2}$, soit environ 1,0595 ; monter de 2 degrés consiste à multiplier par $\sqrt[12]{2} \times \sqrt[12]{2}$, soit racine sixième de 2 ; etc[i]. Cette propriété est une bonne métaphore de ce que perçoit l'oreille : elle est sensible aux rapports de fréquences et non aux différences. Mais les musiciens raisonnent sur les intervalles de notes de façon additive. Euler puis Savart et d'autres ont songé à utiliser pour spécifier les hauteurs de sons des logarithmes des fréquences, de façon à pouvoir les additionner et les soustraire ; on utilise quelquefois le *savart* comme unité de hauteur. */

Dans la gamme tempérée, à part l'octave, les intervalles sont légèrement faux par rapport aux harmoniques ; mais l'oreille, le plus souvent, ne s'en aperçoit pas. D'ailleurs, comme il est dit dans l'*Encyclopédie* de Diderot, « Si les hommes avaient le jugement de leur oreille si exact qu'ils puissent distinguer les plus petites aberrations, c'en serait fait de la musique »[6]. Même si des opposants au tempérament égal regrettent que son adoption nuise à la couleur musicale, cette simplification a de multiples applications, et en particulier les possibilités de modulation, de transposition, d'accord des instruments à clavier. Des compositeurs contemporains érigent en objectif de s'abstraire des contraintes du tempérament égal, souvent par des raisonnements plus basés sur les maths que sur la musique ; certains ont inventé de nouveaux tempéraments, par exemple S. Cordier pour le *tempérament à quintes justes* et O. Messiaen.

Un ami violoniste professionnel m'a confié que, dans sa vie de musicien, le fait de s'éloigner par moment du tempérament égal est possible, en particulier pour rendre plus expressives certaines notes ; on peut parler de *justesse expressive*. C'est courant dans une interprétation en solo, moins dans un ensemble. Un exemple cependant : récemment, dans le cadre d'un trio, il a eu une discussion avec le pianiste qui souhaitait s'écarter peu du tempérament égal, non pour la justesse elle-même mais dans la ligne de sa culture. Tout cela est culturel, subjectif[7]. Y. Hellegouarch écrit une phrase révélatrice : « Les musiciens qui ont la chance de jouer le *quatuor en ut avec flûte* de Mozart savent que le second mouvement contient un passage d'une clarté harmonieuse intense [...] lorsque les instruments jouent dans un tempérament convenable [...] »[8]... Une justesse mathématique... mais pas trop !

Où en sommes-nous ? Après avoir évoqué les ensembles de notes, nous allons jouer avec celles-ci et, avant tout, les organiser grâce aux tonalités.

3. Faire des phrases avec des notes – Tonalités – Un peu d'harmonie

3.1. Harmonie et plaisir

Dès l'avènement de la polyphonie, l'intérêt s'est porté sur les simultanéités sonores et donc sur l'***harmonie***. Que cherche un compositeur ou un interprète ? A procurer du plaisir, de l'émotion. Depuis Euclide (vers -300), comme Rameau au XVIII[e] siècle, des personnalités alliant musique et science – M. Mersenne, R. Descartes, L. Euler, J.J. Rousseau, d'Alembert... – ont essayé d'évaluer mathématiquement la *classe de douceur*, le *niveau de plaisir* de passages musicaux. Cette question pluridisciplinaire est encore d'actualité, incluant mathématiques, physiologie, philosophie... Un facteur essentiel dans le ressenti d'une œuvre est la succession de *tensions* (ou attentes) et de *détentes* (ou résolutions). Et c'est l'argument tension qui va souvent conditionner, sciemment ou non, les choix des compositeurs. Touchons du doigt le rapport entre la notion de tension et la consonance, dans le cadre du discours musical.

3.2. Tension, détente

Le discours musical, pour toucher son auditoire, doit, encore plus que le discours parlé, jouir d'un bon phrasé, de respirations, il doit avancer, comme si on racontait une histoire (même sans contenu), donner envie de bouger, émouvoir, surprendre. Il doit produire des tensions et des détentes, effets qui construisent sa dynamique.

La *tension*, inconfort provisoire, est due soit à un passage musical "désagréable" (dissonance,…) soit à une différence avec ce qu'a anticipé l'auditeur, dicté par sa culture. Mais cet inconfort rend la suite d'autant plus salutaire et favorise la couleur et l'expressivité de l'ensemble. Descartes n'a-t-il pas dit qu'il ne faut pas trop de consonance et que « quelquefois un peu de vinaigre et de sel vaut mieux que de l'eau pure »[9] (cité par A. Papadopoulos). À la base des effets de tension et détente, intervient fortement la notion de ***fonction*** attachée à certains degrés d'une gamme et à certains accords[j]. J'en dirai quelques mots au paragraphe suivant. Des mathématiciens ont travaillé sur la modélisation de la quantité de tension et de ses causes et effets. C'est le cas d'Y. Hellegouarch[10], qui s'appuie sur une modélisation et une mesure des différents commas pour donner une définition formelle de la dissonance et de l'attraction harmonique.

3.3. Tonalités et modes

Prenons l'exemple de la *6ème sonate en La Majeur pour piano et violoncelle*, de L. Boccherini (dont le début de la partition figure plus loin) : elle est écrite dans la **tonalité** de la *majeur*, complètement définie par sa tonique (note principale, qui ici est la) et par son ***mode***, ici *majeur*. Comme le dit H. Barraud, « l'édifice d'une œuvre musicale classique repose sur […] l'installation au pouvoir […] d'une *tonalité principale* et sur la réaffirmation périodique de sa prépondérance »[11]. Un mode est une échelle de degrés, particulièrement significative pour les gammes et échelles diatoniques car les degrés n'y sont pas tous équidistants. Dans le mode majeur, l'échelle a des degrés franchissant les 12 demi-tons d'une octave selon le schéma suivant : ton ; ton ; demi-ton ; ton ; ton ; ton ; demi-ton, qui peut s'exprimer aussi par : 1 - 1 - ½ - 1 - 1 - 1 - ½ (qui se répète *ad libitum*). On peut remarquer deux parties (dites *tétracordes* car elles lient 4 notes) semblables séparées par 1 ton ; cette notion interviendra lorsqu'on traitera de modulation.

Tous les degrés peuvent être la tonique d'une gamme, qui est complètement définie en précisant aussi son mode. Par exemple, la gamme de la majeur est constituée de : la - si - do# - ré - mi - fa# - sol# ; les pièces jouées dans cette tonalité ont *trois dièses à la clé*, on dit que son ***armure*** est constituée de 3 dièses[k]. Selon la place des notes dans la tonalité, elles ne sont pas ressenties de la même façon, c'est ce qu'on appelle leurs différentes ***fonctions*** : tonique, dominante, sous-dominante… Certaines jouissent d'un pouvoir d'*attraction harmonique* ; par exemple, le VIIème degré, dit *note sensible* de la tonalité, soit le *si* pour une gamme de *do*, "appelle" la tonique, le *do* suivant. Les fonctions des notes et leurs enchaînements jouent un rôle capital dans l'expressivité du discours, mais je n'aborde pas ce point, pourtant essentiel en harmonie. Un certain accord joue un rôle primordial car il est le summum de la consonance et de la détente, l'*accord parfait* (exemple : do-mi-sol)[l]. Une illustration : E. Amiot, à propos du *Motif du Désir* dans *Tristan* de Wagner, remarque que sa tension reste irrésolue dans tout l'opéra et que « seule la toute dernière énonciation de ce motif est suivie d'un accord parfait »[12].

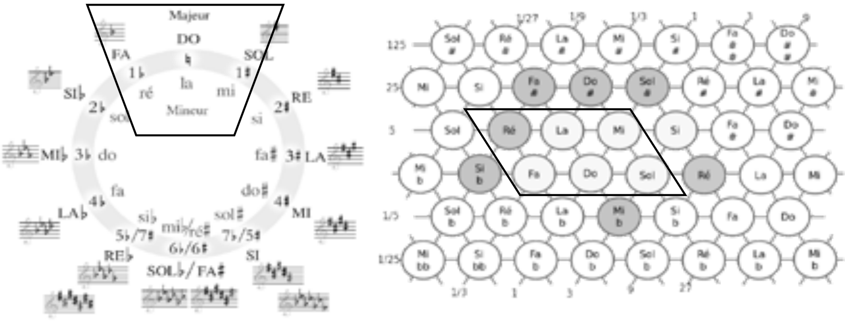
La tonalité d'un passage musical est une sorte de cocon confortable… mais on souhaite quelquefois en sortir. Violer la tonalité au pouvoir – *moduler* – est un moyen fréquent d'introduire une tension.

3.4. Modulation, cycle des quintes, Tonnetz

Le compositeur procède à une *modulation* lorsqu'il change de tonalité de façon non fugitive. On quitte le cocon, mais on souhaite souvent ne pas trop s'en éloigner : on module vers une tonalité *voisine*. En gros, deux tonalités sont dites voisines si leurs armures ne diffèrent que d'une *altération* (dièse, bémol ou bécarre). C'est le cas lorsque leurs toniques diffèrent d'une quinte, comme le montre la figure suivante où les traits gras soulignent les tétracordes. Si à partir d'une certaine gamme majeure G1 on passe à la gamme G2 dont le 1er tétracorde est le second de G1, on est obligé d'introduire un dièse dans G2 pour que le schéma des gammes majeures soit respecté. G2 est voisine de G1. D'où une confirmation de l'importance des quintes et des tétracordes.

		1	-	1	-	1/2	-	1	-	1	-	1	-	1/2	-	1	-	1	-	1/2	-	1	-	1
G1	do		ré		mi		fa		sol		la		si		do		ré		mi		fa		sol	
																						△		
G2									sol		la		si		do		ré		mi			fa ♯	sol	
	<------------ 1 QUINTE --------->								-	1	-	1	-	1/2	-	1	-	1	-		**1**		1/2	

Le compositeur et théoricien ukrainien N. Diletsky fut le premier en 1679 à représenter les quintes successives, ramenées à l'octave, sur un cercle, le *cycle des quintes*, qui s'est avéré riche en utilisations . Dans le *cycle des quintes*, de quinte en quinte, on obtient des tonalités voisines. Souvent, sur la représentation graphique de ce cycle (voir figure suivante), on fait figurer aussi les armures des diverses tonalités. Autre représentation, le *réseau tonal*, ou Tonnetz, dans lequel les déplacements suivant l'axe horizontal représentent des variations d'une quinte (à droite) ou d'une quarte (à gauche), les montées vers la droite correspondant à un rapport de tierce et les montées vers la gauche à la combinaison des deux. J'ai ajouté sur la figure un cadre mettant en évidence les tons voisins d'un ton donné, ici *do*.



CYCLE DES QUINTES TONNETZ (Réseau tonal)

Tonalités voisines de ***do*** dans 2 représentations tonales

Préfiguré par Euler, le Tonnetz a fait l'objet de multiples variantes et logiciels et est à la base de nombreux développements, par exemple l'étude géométrique de diverses transitions entre accords, en particulier par M. Andreatta et D. Tymoczko[13] : étude de distances, symétries, périodicités, recherche de chemins hamiltoniens (passant une fois et une seule par chaque point), équilibre, particularités de tel ou tel compositeur et, même, effets produits sur l'auditeur. D'ailleurs, des compositeurs s'en inspirent en s'y fixant des contraintes. Ces applications du Tonnetz sont particulièrement représentatives de l'intérêt de la géométrie dans l'étude musicologique.

Une remarque : lorsqu'on a modulé de T1 à T2, la pratique normale est de revenir à la tonalité d'origine T1. Mais on peut aussi remoduler, éventuellement plusieurs fois, constituant ainsi une pile de modulations ; la norme est de retourner de Tn à Tn-1,…, de T3 à T2, enfin de T2 à T1. On dépile après avoir empilé. La *structure* (ou *type abstrait*) de *pile*, collection de données gérée selon la règle dernier ajouté, premier supprimé (Last In First Out), est particulièrement importante en informatique où elle intervient dans l'analyse syntaxique, le traitement de la récursivité, etc.

3.5. Transposition, aperçu sur la structure de groupe

La transposition est une pratique courante dont je n'ai pas la place de parler ici. Elle consiste à translater un passage musical vers une tonalité plus haute ou plus basse, tout en conservant tous les intervalles (le *contour* mélodique), et intervient souvent pour respecter la tessiture des chanteurs ou rendre possible la participation d'un instrument *transpositeur*, comme les cors ou trompettes.

En math, une transposition peut être désignée par le nombre de demi-tons (l'intervalle) dont est déplacée la tonique. Comme dit plus haut, les musiciens raisonnent sur les intervalles, donc sur les transpositions, de façon additive : par exemple avancer de 3 demi-tons puis de 5 demi-tons revient à avancer de 8. De même, si on ajoute deux quintes (chacune ayant 7 demi-tons), le nombres de demi-tons dans l'intervalle obtenu est 14. Mais les tonalités sont toujours exprimées par des notes *ramenées à l'octave (réduites)* ; ici, 14 *réduit* donne 14-12= 2. /* On peut exprimer tout cela par une **opération** sur les transpositions (ou les intervalles), l'***addition modulo 12*** : (T1+T2) mod 12 est égal au reste de la *division entière* de T1+T2 par 12. Exemple : (15+16) mod 12 = 7. On dit que l'ensemble des transpositions possibles forme une **structure de *groupe*** avec comme ***opérateur*** l'*addition des intervalles modulo* 12. */

Les ***structures*** d'objets (pile, groupe,…) sont un concept essentiel en maths car elles permettent des raisonnements généraux indépendamment de la nature des objets considérés, et aussi de bâtir d'autres structures qui à leur tour sont le siège de nouveaux raisonnements. Les mathémusiciens ont beaucoup à dire sur ce sujet (théorème de l'hexachord (Babbitt) cité par Andreatta[15], etc.). Application de l'addition des transpositions, O. Messiaen a introduit des modes particuliers dans lesquels, au bout d'un nombre petit de transpositions, on revient au point de départ (la somme de ces transpositions est égale à 0) : les *modes à Transposition Limitée* ; bien décrit avec humour par E. Amiot[16].

4. Rythmes

4.1. Importance du rythme

L'aspect temporel du discours musical est primordial, le rythme en est un composant incontournable, bien plus encore que dans le discours parlé. Le rythme est avant tout une question de durées, y compris l'intervention de *respirations*, mais aussi affaire d'intensités, d'accents, et même de timbres, et joue un rôle dans la production de tensions et détentes. Certains compositeurs, comme Dvořák, associent remarquablement harmonie et rythme : « C'est un peu comme si, par enchantement, l'harmonie se colorait d'elle-même au gré des fluctuations mélodiques et rythmiques de l'inspiration »[17].

4.2. Notation de la musique (1) et rythme

Début de la partition de l'adagio de la 6ème sonate Piano et violoncelle de L. Boccherini, en la majeur

C'est avec l'avènement de la polyphonie qu'il est devenu indispensable d'exprimer la durée des notes pour permettre la synchronisation des voix. Une partition est avant tout une représentation géométrique de la hauteur des notes, en fonction de leur déroulement selon l'axe horizontal. Les notes inscrites sur une partition ont, en plus de leur position sur la portée qui indique leur hauteur, une forme qui exprime leur durée relative *(rondes, blanches, noires, croches, doubles croches…)*. De même pour des substituts de notes, les *silences* (absences de note). De plus, la partition est divisée en mesures, séparées par des *barres de mesure*, verticales. Toutes les mesures d'une même partie auront la même durée, indiquée par le *signe de mesure* (dans la figure : C, équivalent de 4/4, qui signifie "4 noires par mesure ou leur équivalent"). La première ligne de chaque partie contient son *armure* (ici : "3 dièses"). Il y a bien d'autres indications. Les interprètes jouent chacun sa partie ; ici, le violoncelle joue des doubles et triples croches pendant que les deux mains du piano jouent moins de notes, mais tous se retrouvent à chaque mesure. Il y a des calculs à faire pour régler tout cela, par exemple vérifier que la somme des durées des notes dans chaque mesure est bien celle voulue. Mais cela peut être bien plus compliqué.

4.3. Rythme lié au genre

Le rythme peut, à la marge, être affaire personnelle de l'interprète et signer sa particularité : un soliste peut s'attarder sur une note ou un silence (*rubato*, qui signifie "temps volé"), pour en faire mieux apprécier la valeur ou créer une tension, ceci concourt au phrasé. Les clavecinistes utilisent ces retards ou de légères accélérations pour créer des nuances que leur instrument ne permet pas. Mais chaque style de musique a des particularités rythmiques dont voici un très bref aperçu. Les premières musiques profanes ont été des musiques de danse, où le rythme était roi. Je citerai plus loin la musique vocale. Dans la musique de film, intervient une contrainte déterminante : respecter le rythme du film. Dans le cinéma muet, c'était un asservissement fort, comme j'ai pu le constater un jour où le directeur du Conservatoire, J.Ph. Navarre, a accompagné avec un ensemble d'élèves une projection du film muet d'A. Calmettes *L'assassinat du Duc de Guise* (1908), pour lequel C. Saint-Saëns composa ce qui est considéré comme la première musique de film ; à la difficulté de suivre exactement le bon rythme, s'ajoutait le fait que la bande du film, vieille, ne se déroulait pas régulièrement ! Dans les musiques liées au folklore, le rythme tient aussi une place déterminante : rythmes bulgares de Bartok, musiques Klezmer, africaines, et bien d'autres. Il existe aussi des musiques sans mesures, à rythme libre, dont je ne parlerai pas. On ressent la musique avec ses oreilles et son cerveau, mais aussi avec son corps, surtout si elle bat elle-même à un rythme auquel on est naturellement sensible : rythmes vitaux, rythme des vagues, etc. L'intérêt des mathématiciens pour l'étude du rythme va sans cesse croissant, ce qui est le cas par exemple pour D. Levitin et V. Menon[18].

5. Construire des œuvres avec des phrases – Formes musicales

5.1. Notation de la musique (2), MIDI

L'évolution de la composition musicale a poussé à enrichir la notation. Depuis les neumes du Moyen Âge, qui n'indiquaient pas avec précision la hauteur ni la durée des sons, sont apparues les portées et les significations précises des notes qui y sont inscrites. Il serait intéressant de décrire les pratiques des imprimeurs de musique avant l'informatique. Les informaticiens ont assez tôt essayé de formaliser la notation et cela s'est révélé difficile tant est élevé le nombre d'informations à exprimer de façon très compacte. Ces efforts ont abouti, en particulier à la norme MIDI, qui, en plus d'être une aide à l'édition musicale, a de multiples applications : communiquer, entre musiciens mais aussi entre musiciens et ordinateurs et, même, instruments. On peut jouer un morceau sur un synthétiseur ou un instrument MIDI, en obtenir une transcription en MIDI, la manipuler, la combiner, l'essayer, en faire des extraits et les recomposer, pour aboutir à une pièce polyphonique. La norme MIDI permet d'exprimer, pour chacun des différents instruments impliqués, les notes à jouer, leurs début et fin, une indication du timbre, des paramètres de l'émission du son (attaque, liaison,,…), des réglages et paramétrage des effets, etc.

La notation musicale se complique encore avec la musique contemporaine, qui casse les barrières et oblige donc à expliciter ce qui sort de la norme (microintervalles, choix ouverts d'interprétation). Les réflexions, souvent d'ordre mathématique, sur les normes d'écriture comme MIDI ont nécessité et facilité des avancées notables en théorie musicale et en composition.

5.2. Lois de composition

Une des dimensions importantes de l'harmonie est la façon dont les différentes voix se combinent et se complètent. Pour analyser un passage musical, on peut le considérer comme un enchaînement de phrases, chacune étant à son tour composée de motifs[n]. L'harmonie n'est pas née sans précédents, ce qu'explique A. Heim : « En passant du stade de la monodie […] à la polyphonie, la musique va d'abord tout naturellement superposer des mélodies. Ainsi apparaîtront des règles permettant de gérer au mieux les éventuelles dissonances causées par cette superposition *point contre point* […] »[19]. Si dans le contrepoint les lignes mélodiques dépendent peu les unes des autres, l'harmonie est la science d'une certaine vie collective des composants. Leonard Bernstein[20], dans ses remarquables émissions musicales pour la jeunesse, baptise la musique classique *exact music*, parce qu'elle doit être jouée, dit Christian Leblé, d'une manière fixée par le compositeur, à la différence de la musique populaire.

Les facteurs intervenant dans la composition sont tous passibles d'intéressants développements mathématiques : grammaire de la composition, géométrie et topologie des lignes mélodiques, propriétés des contours mélodiques, symétries, périodicité (Boléro de Ravel…), consistance du discours, équilibre… C'est crucial en musique de chambre et tout particulièrement dans le quatuor, dans lequel les quatre voix se relaient et se superposent pour donner l'impression d'un instrument unique d'une riche couleur, l'ensemble étant plus beau que le somme de ses parties. Comme autre illustration, citons Alban Berg (1885, 1935) dans une lettre à son maître vénéré Schönberg ; il y décrit le *Concerto de chambre* qu'il lui dédie pour son 50ème anniversaire : « […] ordonnance ternaire des événements […], la deuxième variation fait entendre la mélodie du thème dans sa forme renversée […]. Il s'agit de canons au cours desquels des groupes de voix, entrés après un premier groupe, tentent de le rattraper […]. Un caractère de scherzo domine la première partie […] »[21]. A l'époque classique, les œuvres avaient des structures globales assez conventionnelles, répondant à des règles précises dont nous présentons plus bas un bref échantillon. Plus tard, des compositeurs comme Stravinsky, Berg, Messiaen, Ligeti, Boulez ont aimé se donner des contraintes de composition, de nature mathématique, comme par exemple : apparition du thème en des laps de temps premiers entre eux.

5.3. Le paradigme "pareil et différent".

Avant d'évoquer quelques formes parmi les principales, insistons sur un des moyens du bien-être de l'auditeur, le rappel ou imitation, et ceci à diverses échelles. Souvent, à l'intérieur d'un mouvement ou même d'une phrase, le compositeur requiert la répétition, fidèle ou non, d'un fragment précédent, ce qui est de sa libre volonté ou pour répondre à des règles, comme dans la *fugue* ou les *thèmes et variations*. Lorsqu'on écoute un mouvement d'une œuvre, on peut souvent remarquer qu'une ligne mélodique apparaît puis est légèrement transformée, soit par une légère différence de tonalité, préparant une modulation, soit pour introduire un nouvel effet ou pour jouer avec cette ligne – par exemple l'inverser –, soit pour construire une combinaison de lignes… A l'échelle d'un morceau ou d'un ensemble de morceaux, l'imitation peut avoir une signification particulière, le meilleur exemple étant celui du *leitmotiv* chez Wagner, qui rappelle un personnage ou une idée au moment opportun, ou l'*idée fixe* dans la *Symphonie Fantastique* de Berlioz. Enfin ces rappels peuvent être des citations pour réminiscence d'un air connu ou d'un hymne. Quelquefois, le rythme à lui seul est évocateur ("papapa-paaaaaaaaa" fait penser à la 5ème symphonie de Beethoven) ; Beethoven d'ailleurs était très ingénieux pour trouver des motifs minimaux reconnaissables. Une question intéressante est "jusqu'à quel niveau de dissemblance peut être reconnue une association significative ?". Le paradigme *pareil et différent*[22], omniprésent en musique, intéresse les mathématiciens qui étudient par exemple la distance spatiale, temporelle ou sémantique, entre items analogues, dans différents espaces.

5.4. Quelques formes musicales importantes

La forme sonate

Un mouvement répondant à la *forme sonate*, dans les sonates de l'époque classique comme dans des premiers mouvements de symphonies, comporte au moins une exposition (composée de deux thèmes dans des tonalités différentes, souvent voisines), un développement et une réexposition. Pour F. Rossille, « le développement reprend des éléments de l'exposition pour en prolonger les idées au moyen de répétitions, variations, modulations et autres procédés. Le parcours tonal se conclut sur la réexposition au ton initial après avoir exploré des régions tonales parfois fort éloignées »[23].

Le canon et la fugue, ainsi que le thème et variations

Ce sont les fruits directs du contrepoint et des illustrations fidèles de *pareil et différent*, qui ont été mises en œuvre par J.S. Bach, mais aussi par bien d'autres et plus récemment par A. Berg, P. Hindemith, P. Boulez… Dans le canon, différentes copies assez exactes d'un thème sont jouées par les différentes voix, ceci régi par des règles précises et souvent de nature numérique. Une fugue est une forme à plusieurs voix avec un thème, le *sujet*,. qui est répété successivement par les différentes voix dans des variantes et combinaisons savantes.

Canon et fugue ont passionné musicologues et mathématiciens, qui en ont étudié les règles, leurs effets, leurs combinaisons, leurs variantes, la façon dont les compositeurs les exploitaient ; voir en particulier A. Papadopoulos[24] et l'extraordinaire ouvrage de D. Hofstadter[25]. Par exemple, un canon rythmique – étudié par Euler et pratiqué par J.S. Bach – est un canon où seul le rythme est pris en compte. Une voix est représentée par la suite rythmique A de ses notes, le canon étant modélisé à la fois par A et par la suite des translations qui lui sont appliquées ; l'étude de cet objet simple est fertile lorsqu'on impose des contraintes, par exemple que les attaques des notes par les différentes voix ne soient jamais synchrones. Par une démarche courante des mathématiciens qui est de se demander si un problème en cours peut être rapproché de problèmes déjà traités, même dans des domaines différents, on a trouvé ici des analogies avec des problèmes de *pavage*, où on cherche à recouvrir une surface donnée avec des dalles identiques.

On trouve aussi des représentations géométriques de fugues, comme sur une couverture de disque de l'*Art de la Fugue* de J.S. Bach par Münchinger. Citons enfin une autre illustration typique du *pareil et différent*, la forme *Thème et variations*, les items variés pouvant être l'ornementation, le rythme, la tonalité, l'orchestration,…

Le jazz et le blues

Le jazz pourrait faire l'objet d'une conférence. Par sa liberté, sa richesse, il est le siège de l'accentuation de tout ce que nous avons décrit : il intègre des changements de tonalité et de mode, donne une grande importance aux tensions et détentes, au phrasé, aux altérations de timbres, à la liberté de rythme et d'interprétation. On y rencontre une spécificité harmonique, l'intégration dans la tonalité principale, par les noirs américains, de la *note bleue* (quarte augmentée ou quinte diminuée), utilisée à des fins expressives, pour illustrer la nostalgie ou la tristesse (d'après Wikipedia "Note bleue"). Le terme blue vient de l'expression anglaise *Blue devils* (*diables bleus*, qui signifie "idées noires" !).

La musique vocale

La voix, son émission et son audition sont des sujets d'étude pour les physiciens, acousticiens, physiologistes et généticiens, médecins et, pour chaque sujet, des mathématiques sont mises en œuvre. Un exemple : une étude statistique montre que la puberté est de plus en plus précoce et a avancé de presque six ans depuis un siècle, en particulier pour les garçons, ce qui crée des difficultés pour les chœurs d'enfants.

Une particularité fertile de la musique vocale est le soutien réciproque que s'apportent musique et texte pour produire émotion, surprise, peur ou rire. On peut noter que chaque langue a des spécificités qui se ressentent fortement dans la musique vocale qui l'illustre. Le lien entre musique et texte est spécialement fort, contraignant mais fécond pour la poésie, ce dont le musicologue Jean Roy donne une belle analyse : « Le miracle de Poulenc mélodiste, c'est […] qu'il ne fait pas de contresens. Non seulement […] sur le fond, sur la qualité de l'émotion recelée par les mots, mais encore la musique de Poulenc leur donne aussitôt une luminosité, une transparence nouvelle et immédiate qui fait percevoir simultanément tous les possibles enfermés dans le mot ou la phrase. Et cela grâce à une prosodie remarquablement soignée, premier souci d'un compositeur qui revit son texte en poète avant de le sentir en musicien »[26]. En Grèce antique, la musique vocale était inséparable de la poésie et toutes deux répondaient à des règles strictes, sur le *schéma métrique,* sur les aspects rythmiques liés à la scansion, sur la prosodie et les hauteurs. Cet aspect est également crucial dans le Chant Grégorien – destiné à soutenir le texte liturgique en latin – qui, chanté a cappella et à l'unisson, répond à des formules mélodiques et rythmiques strictes. Tout ceci, à forte connotation mathématique, laissait a priori peu de liberté à la musique qui recherchait la beauté, probablement moins comme but que comme moyen. Mais le summum d'osmose mélodie-paroles fut probablement atteint dans le *Madrigal* italien de la Renaissance, musique profane polyphonique à tendance maniériste dans laquelle les lignes mélodiques et rythmiques illustraient de façon très suggestive le sens des paroles, comme on peut le vivre dans les œuvres de Cl. Monteverdi, Palestrina, R. de Lassus,… puis en Angleterre W. Byrd, Th. Morley,…

Un dernier mot : on a prouvé statistiquement l'impact des slogans chantés, l'aide de la musique à la mémorisation (même pour les tables de multiplication…), et on peut modéliser dans une certaine mesure l'humour qui naît d'un conflit entre parole et musique. Bon lien vers la sémantique.

6. Sémantique et beauté

6.1. Le nombre d'or et la suite de Fibonacci

Les nombres ont souvent inspiré ou structuré la pensée de compositeurs, pour une raison soit symbolique ou mystique, soit esthétique ou intellectuelle, soit même physiologique. Le ***nombre d'or***, noté φ (en hommage à Phidias, architecte du Parthénon), appelé aussi *divine proportion* ou *section dorée*, occupe une place de choix, reflétant un équilibre harmonieux dans la division d'une entité en deux parties. Cette division respecte la divine proportion quand le rapport entre l'entité entière et la grande partie est égal au rapport entre celle-ci et la petite ; ce rapport est nécessairement φ. C'est le cas du *rectangle d'or,* pour lequel le rapport entre le grand côté (g) et le petit (p) est égal à φ ; il jouit d'une propriété remarquable, intervenant dans son caractère harmonieux : si on le décompose en un carré de côté p et le rectangle restant, celui-ci est à son tour un rectangle d'or. Et cette propriété peut, bien sûr, être répétée à l'infini. /* En quelques mots : φ est la racine positive de l'équation $x^2-x-1=0$, vaut environ 1,618, et est la limite vers laquelle converge le rapport entre 2 termes successifs de la ***suite de Fibonacci***. */ Cette suite est définie par le fait que chaque terme à partir du 3ème est égal à la somme des deux précédents ; ainsi, si les deux premiers termes sont égaux à 1, ses premiers termes sont : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55. Elle est représentative de la croissance d'une population ou d'un tissu, les exemples dans la nature en étant nombreux (carapaces, coquillages, inflorescences…). Une abondante littérature, depuis Euclide, traite de la présence de ces nombres et du nombre d'or dans la nature et dans les proportions du corps humain, et de leur emploi, implicite ou explicite, avéré ou supposé, dans les arts et en particulier en architecture (cf. Leonard de Vinci, Vitruve, Le Corbusier, etc.).

De nombreux compositeurs ont utilisé φ pour déterminer, dans une œuvre, les durées relatives des différentes sections ou la place de son point culminant. Cette pratique se rencontre chez R. de Lassus, R. Wagner, E. Satie, M. Ravel, A. Webern entre autres. B. Bartok (1881, 1945) a souvent pratiqué ce découpage à un niveau global, mais aussi dans le cœur même du tissu musical, comme le montre le joli site construit par trois élèves du Lycée Champollion de Grenoble[27], au sujet du premier mouvement de la *Musique pour cordes, percussions et célesta*. Les différents instruments font leur entrée dans la fugue aux mesures n° : altos : **1** ; violons n°3 et 4 : **5** ; violoncelles : **8** ; violons n°2 : **13** ; contrebasses : **18** ; violons n°1 : **27**. Les numéros de mesure soulignés appartiennent au début de la suite de Fibonacci ; la structure des passages se terminant aux mesures 18 et 27 a aussi un lien avec elle, ainsi que les intervalles mélodiques ! Ainsi Bartok cède-t-il à son amour de la nature et des maths, et au rêve de son époque de représenter et expliquer l'univers en un principe « unique, simple et beau », pour citer A. Einstein. C. Debussy (1862, 1918) a aussi utilisé le nombre d'or, une de ses intentions étant que certaines parties aient la même structure que le tout[28], comme dans les rectangles d'or. I. Xenakis (1922, 2001), compositeur ayant une solide formation en maths et ayant travaillé avec Le Corbusier, s'est souvent réclamé de l'usage des propriétés mathématiques de ses compositions et a utilisé le nombre d'or, entre autres dans *Metastasis* (1955). Les compositeurs Boïeldieu, Haydn, Mozart bien sûr, Erik Satie, Sibelius… ont fait partie de loges maçonniques et, à ce titre, la plupart voyaient dans le nombre d'or un symbole fort et en ont imprégné certaines œuvres. Enfin, en lutherie, il semble que Stradivarius ait fait intervenir le nombre d'or dans les proportions générales du violon, la place des ouïes, la forme de la volute, et ceci probablement pour des raisons esthétiques et symboliques plus que techniques.

6.2. Musicalité, expressivité, communication multidirectionnelle

Votre figure s'éclaire, vous avez envie de chanter, de danser, comme sur un tango de Piazzola ou en écoutant un chœur de la *Messe en si* de Bach, vous avez le cœur triste mais l'esprit léger, le concert vous a plu. La sémantique de la musique est un sujet ouvert et passionnant que je ne fais qu'effleurer. Milan Kundera, par exemple, parle des écrits et de l'œuvre de Leos Janáček, dans son effort de trouver une musique post-romantique, comme « la quête de la sémantique musicale. Comme s'il voulait établir un dictionnaire sentimental des formules mélodiques »[29].

Toute activité musicale est **acte de communication**, à toutes les échelles de temps et d'événement, essentiellement entre compositeurs, interprètes, auditeurs, mais aussi journalistes, publicitaires, éducateurs, politiques, etc.

Le rôle du compositeur en direction des auditeurs

E. Amiot, dans sa thèse fort intéressante, pense que « si une raison cachée de la beauté est la régularité des formes, il ne faut négliger aucun des moyens permettant de la dévoiler »[30]. Et il s'y emploie, avec d'autres mathémusiciens, en isolant des motifs ou accords et en étudiant leurs rapports de symétrie, de distance… Par exemple il fait remarquer que, dans le *Motif du Désir* de *Tristan* de Wagner, où il a découvert plusieurs types de symétries, les deux accords importants apparaissent « en s'écartant, comme Tristan et Isolde incapables de se trouver dans ce monde ». Métaphore géométrique ! Les sujets sous-jacents, explicites ou non, inspirent le compositeur et l'incitent à certains effets : l'évocation de la nature, comme chez O. Messiaen qui imite des chants d'oiseaux qu'il a scrupuleusement notés ; la passion, la tempête, la mort, la folie à l'Opéra . Autres facteurs influents : la volonté de respecter des canons de beauté (nombre d'or…), de citer des thèmes ou rythmes déjà connus, d'évoquer des rythmes biologiques, d'apporter de l'humour, de l'originalité. La beauté touche d'autant plus l'auditeur que se dessine en lui – et vit – une **image mentale**.

La couleur orchestrale[o] est un facteur de beauté qui se crée en combinant des timbres ou en en inventant de nouveaux – souvent issus de résultats mathématiques (Ondes Martenot…) –, en introduisant des changements brusques de rythme (dynamique sonore), en mettant en relief des motifs… La beauté peut aussi résulter des caractéristiques *prosodiques* (phrasé, respirations, retards, silences, élan, dynamique) et des *effets* créés par le compositeur (tensions et détentes, par les notes ou par le rythme, réminiscence, nuances…). La musique romantique est la plus chargée émotionnellement et a quelquefois même abusé des effets, ce qui a amené à des révolutions, comme l'atonalité.

Des études mathématiques ont porté sur tous les caractères dont nous venons de parler et, par exemple, une remarque intéressante est donnée par M. Chemillier[32] notant que l'art aime souvent des *signaux coûteux*, comme les ornementations, prenant le contre-pied du principe d'économie et de *parcimonie* qui régule les activités vitales. Mais, pour conclure, remarquons que l'essentiel de la communication compositeur-auditeur est l'élan de vie et d'émotion que contient l'œuvre et qui doit pouvoir être exprimé par les interprètes pour toucher l'auditeur. Beethoven et Haydn, par exemple, attachaient implicitement une grande importance à l'effet de leur musique sur leur public, à l'image mentale qu'elle faisait naître, et ils aimaient bousculer celle-ci par des effets de surprise, comme le coup de timbale de la symphonie du même nom ou de brusques changements de nuance, créant ainsi une tension qu'ils avaient plaisir à résoudre ensuite..

La communication entre interprètes et auditeurs

Il existe des représentations physiques, intéressantes mathématiquement, de toutes les réalisations par les interprètes d'effets musicaux comme – cités en vrac –: nuances, vibrato, toucher, sonorité, attaques, phrasé, tension/détente, dynamique, silences, couleurs orchestrales, équilibre et déséquilibres. Prenons un exemple: pour modéliser l'attaque d'une phrase musicale, événement qui marque l'arrivée d'un son, on a besoin d'une mesure de la fréquence sonore à des instants extrêmement proches les uns des autres donc nombreux. Si l'on fait des mesures très rapprochées du signal durant tout un morceau, on obtient une information extrêmement lourde, d'où l'idée de concevoir une représentation du son à échelle de temps variable, par exemple par la notion d'*ondelettes* (Pour la science n°373, p. 87). C'est un exemple du concept couramment utilisé de *représentation parcimonieuse*. /* Un autre exemple de l'implication des maths à propos de l'interprète est donné par F. Nicolas[33] qui explique comment un examinateur pourrait synthétiser ses jugements sur des candidats dans des concours d'interprétation par un calcul d'intégrale, mettant même en œuvre, selon les cas, différents types d'intégrale (Riemann, Lebesgue,…). */

L'échange en retour du public vers les interprètes joue un rôle important, dans l'instant – un interprète joue mieux quand il sent une adhésion du public – mais aussi à plus long terme par les comptes rendus des critiques musicaux. L'audimat est un outil à base de statistique; il peut avoir un effet néfaste sur la créativité, souligné par Jacques Chancel lorsqu'il disait « Il ne faut pas donner aux téléspectateurs ce qu'ils aiment voir, mais ce qu'ils pourraient aimer ». Il ne faut pas oublier non plus la riche communication entre interprètes au sein d'un ensemble.

6.3. Musique et transcendance… où l'on rejoint les plasticiens

L'expressivité et la qualité de jeu donnent lieu, ai-je dit, à formalisation, mais celle-ci est bien sûr incomplète. Debussy, dans *Monsieur Croche*, situe bien la question : « La musique est une mathématique mystérieuse dont les éléments participent de l'infini »[34]. F. Rossille[35], de son côté, cite V. Vasarely : « Le sentiment d'infinitude qui résulte [de l'ambiguïté] est probablement une des raisons pour lesquelles nous ne nous lassons pas de la contemplation de certaines œuvres plastiques et de l'écoute de certaines musiques [...]. Notre esprit complète des images visuelles ou auditives seulement esquissées ». Il est clair que Vasarely est sensible à la musique (voir son *art cinétique* qui introduit le temps dans l'œuvre plastique). Son credo est, comme pour P. Klee, V. Kandinsky et d'autres membres du *Cavalier Bleu*, l'abstraction comme pivot entre la réalité et l'œuvre artistique, et il dit : « L'idéal est d'arriver à une totale simplicité sur le plan objectif pour une complexité maximale sur le plan subjectif ». Pour P. Boulez, « il faut apporter en soi-même l'irrationnel mais maintenir en même temps la transcription rationnelle qui, seule, peut rendre compte du potentiel irrationnel qu'on a en soi »[36]. Ces quelques lignes sur la sémantique illustrent les possibilités pour la musique de relever d'un ordre supérieur.

7. Pourquoi J.S. Bach ?

7.1. Numérologie

J.S. Bach était imprégné d'une riche symbolique des nombres et y attachait une forte superstition. Par exemple, il aimait beaucoup le 14, égal à la somme des rangs alphabétiques des lettres de son nom (2+1+3+8), il le faisait souvent intervenir, de même que ces lettres elles-mêmes par des motifs basés sur les notes B, A, C, H en notation allemande (si , la, do, si). L'*Art de la fugue* comporte 14 fugues dont la dernière a comme thème B.A.C.H. En hommage à Bach, ce motif a été moult fois utilisé par des compositeurs et, près de nous, par la Nancéienne Nicole Clément. Il aimait aussi les énigmes et l'humour et se servait des nombres, quelquefois de façons si subtiles qu'on pense ne pas les avoir toutes découvertes. Mélomanes et musicologues ont été à la recherche de ces secrets (par exemple, cf.[37]). Le nombre d'or l'intéressait particulièrement, pour des raisons symboliques et esthétiques. Mais son affinité avec les maths allait bien plus loin !

7.2. L'esprit algébriste de J.S. Bach

Canons rythmiques, fugue… nous avons donné des illustrations de sa sensibilité aux maths. Debussy, dans *Mr Croche*, affirme que Bach se moquait bien « des formules harmoniques. Il leur préférait le jeu libre des sonorités, dont les courbes, parallèles ou contrariées, préparaient l'épanouissement inespéré qui orne d'impérissable beauté le moindre de ses innombrables cahiers»[38]. Cette analyse à tonalité géométrique appelle une question: peut-on créer de la beauté mathématique sans le vouloir et même sans le savoir ? Je pense que oui, par des chemins plus ou moins directs. Il est certain que Bach appelait sans cesse des structures algébriques, des lignes géométriques au cœur même de ses œuvres et les entrelaçait. Musicologues et mathématiciens se sont penchés sur ce sujet passionnant, en particulier G. Cantagrel[39]. Nous ne pouvons que citer quelques exemples.

Avec sa culture germanique égayée d'italienne, et pédagogue méthodique, il aimait les aventures harmoniques et rythmiques qu'il traitait avec méthode; il se fixait des règles et des opérations, et les expérimentait, les combinait et les superposait de façon exhaustive, à l'échelle d'une œuvre ou d'un cycle *(Variations Goldberg, Petit livre d'orgue, Art de la fugue…)*. Ainsi, le *Clavier bien tempéré* comprend deux cycles de chacun 24 préludes et fugues écrits dans tous les tons et demi-tons de la gamme. Le motet *Jesu meine Freude* a une composition symétrique en arche: au centre, 6ème partie, une fugue magistrale ayant pour idée "L'esprit de Dieu habite en vous" et de chaque côté une alternance de 3 strophes du choral *Jesu meine Freude* et 2 extraits de l'*Épître aux Romains*. Comme l'affirme A. Dommel-Diény[40] à propos du contrepoint, la «rigueur, loin d'exclure les possibilités de contours mélodiques recherchés, exige au contraire ceux-ci».

Il avait par ailleurs établi dans l'absolu des fonctions de correspondance entre d'un côté mots (avec leur accentuation en Allemand) et concepts et, de l'autre, lignes mélodiques ou rythmiques, et il en faisait usage de façon subtile et souple. L'allure géométrique des lignes et mouvements illustrait avec concision l'ascension, la mort… Autre exemple, comme le remarque R. Coulon: «J. S. Bach a exploité [la propriété de l'ensemble des intervalles d'avoir une structure algébrique de *groupe cyclique*] dans *Le petit labyrinthe harmonique*. Cette pièce enchaîne les modulations et explore toutes les tonalités, tant et si bien qu’au bout d’un moment l’auditeur est perdu et ne sait plus dans quelle tonalité la pièce a débuté»[41]. D. Hofstadter confirme: «Bach a utilisé sa connaissance des progressions harmoniques pour manipuler vos émotions et susciter en vous l'espoir»[42] de revenir à la tonique. M. Escher et J.S. Bach, mais aussi Lewis Caroll, se seraient bien entendus par l'entremise de D. Hofstadter pour jouer avec humour avec les *boucles étranges*, l'*auto-référencement*, les *canons cancrizans* (ou *canons crabes*) et les *canons éternellement remontants* (qu'Hofstadter compare aux escaliers de M. Escher) de l'*Offrande musicale* !

Une raison imaginable de l'esprit mathématique de Bach est, selon J.E. Gardiner[43], que les maths lui ont été enseignées non pas comme une discipline à part mais comme partie intégrante de son cursus culturel. Cet esprit scientifique sous-tend une musique presque toujours merveilleusement apaisante, et atteignant souvent des sommets de profondeur émotionnelle, il a même des tendances à l'expressionnisme. « Jamais la science – et quelle science – ne prend le pas sur l'expression ; l'imagination jaillit sans cesse, imprévisible et vivifiante [], pour chanter et danser la vie, pour louer et supplier Dieu »[44]. Nous touchons là à la transcendance.

8. Un mot sur la recherche en mathémusique et l'IRCAM

Je passe volontairement sous silence le large sujet de la musique contemporaine à prépondérance formelle dont un représentant imminent, P. Boulez, vient de disparaître. Mais les mondes actuels des compositeurs et des chercheurs ont une très large intersection, que je ne fais que survoler ici faute de place. En France, les pionniers, dans les années 1960, ont été M. Philippot, qui a appliqué des techniques mathématiques à l'analyse de ses propres œuvres, I. Xenakis et P. Barbaud. Celui-ci « a écrit *La Musique, discipline scientifique. Introduction élémentaire à l'étude des structures musicales* en utilisant la théorie des groupes et la théorie des graphes. L'ouvrage est particulièrement important : il invite à penser de façon nouvelle et générale l'ensemble des connaissances intitulées harmonie, fugue, contrepoint, etc. dont l'enseignement retardataire ne montrait en rien l'unité »[45]. En 1958, F.B. Mâche a fondé aux côtés de P. Schaeffer, polytechnicien nancéien, musicologue et pionnier de l'informatique musicale, le Groupe de Recherches Musicales de la Radio, le GRM qui est encore actif.

L'IRCAM (Institut de recherche et coordination acoustique/musique), créé par P. Boulez en 1969, réunit compositeurs, interprètes et chercheurs et est un organisme incontournable de la recherche mathémusicale. P. Boulez, compositeur et grand chef d'orchestre, créateur en 1976 de l'*Ensemble Intercontemporain*, a été extrêmement créatif et curieux, attiré en particulier par les croisements artistiques (grand intérêt pour P. Klee…). F. Nicolas exprime l'opinion que « les références aux sciences constituent chez Boulez une révérence, tactiquement utile à ses propres enjeux musicaux, plutôt qu'elles n'orientent un labeur véritable »[46]. Mais Boulez a donné un élan formidable à la recherche et l'IRCAM a fédéré autour de lui de nombreuses structures, surtout universitaires, qui développent et expérimentent des idées plus avancées les unes que les autres, dans une sorte de jubilation intellectuelle. La recherche mathémusicale a de plus en plus d'adeptes, au sein de l'université (Rennes, Marseille, Paris, etc.), de l'École Polytechnique, d'INRIA, et la plupart des chercheurs naviguent entre ces organismes ; citons quelques noms souvent rencontrés dans les publications, après ceux d'A. Riotte et M. Philippot : F. Rossille, K. Beffa, Ph. Manoury,

M. Andreatta, E. Amiot, I. Viaud-Delmon, G. Assayag, J.L. Giavitto… Leurs sujets principaux tournent autour de la conception et la mise en œuvre de modèles algébriques pour la formalisation de structures musicales, les modèles géométriques (traduire des propriétés musicales par des propriétés spatiales et parcourir les espaces ainsi conçus), la modélisation d'instruments, les logiciels d'analyse et d'aide à la composition, la synthèse sonore, la spatialisation, le temps réel, les aspects cognitifs, musique et cerveau, etc.

Des scientifiques s'intéressent fort à la musique comme C. Villani et J.P. Changeux. Le physicien et compositeur J.C. Risset[47] a étudié mathématiquement et synthétisé des timbres en s'intéressant particulièrement à leur perception, et a créé des illusions ou paradoxes acoustiques, par exemple des glissandi qui montent et descendent à la fois, faisant penser aux escaliers d'Escher, aux paradoxes de Penrose et aux canons éternellement remontants de J.S. Bach ; il a également fait un point très documenté sur l'organisation de la composition. Congrès et publications savantes ou plus vulgarisatrices se multiplient, le sujet est souvent abordé dans les rapports de TPE (Travaux encadrés dans les lycées) car c'est un bon sujet d'ouverture mathématique. Je n'ai pas la place de présenter les logiciels d'aide à la composition ou à l'analyse musicales qui sont créés, améliorés, utilisés avec une forte densité, en particulier autour de l'IRCAM et dans l'équipe de recherche MuSync (Arshia Cont, IRCAM ; J.L. Giavitto, CNRS ; F. Jacquemard, INRIA). L'OULIPO (Ouvroir de Littérature Potentielle) a maintenant une sœur OUMUPO pour jouer avec la composition sous contraintes.

9. Apports de la musique aux maths

Nombreuses sont les applications musicales qui, par leur originalité et l'éclairage qu'elles apportent, par leur questionnement nouveau, ont ouvert les yeux des mathématiciens sur certaines mises en défaut ou certains prolongements possibles de leurs théories. C'est d'ailleurs un facteur classique des avancées en maths. Par ailleurs, les mathématiciens, en plus du plaisir que leur apporte la musique, apprécient quelquefois le caractère harmonieux d'une démonstration mathématique.

La musique peut apporter un soutien remarquable dans l'enseignement des maths, au moins pour deux sortes de raisons. D'abord, des exemples musicaux peuvent être la clé de la compréhension de règles, opérations ou structures mathématiques, et ceci aussi bien à l'école maternelle qu'ensuite. Mais en outre, on s'est aperçu que les enfants ayant pratiqué jeunes un instrument de musique avaient acquis, en plus de l'habitude et de la discipline de l'effort intellectuel, des aptitudes objectives, en particulier en maths. Objectives parce que cela a pu être étudié statistiquement et surtout visualisé par de l'imagerie du cerveau, sujet passionnant que je ne peux traiter ici ; deux auteurs marquants, parmi d'autres : O. Sacks et S. Nozaradan.

10. Ce que j'aurais aimé traiter

J'aurais aimé traiter d'autres sujets, comme : *fonctions* des degrés de la gamme et des accords ; contrepoint, règles du canon et de la fugue ; instruments et lutherie, orgue ; synthétiseurs ; musique mécanique, automates ; enregistrement et codage musicaux (MP3, MIDI…) ; acoustique et ses illusions, conception de salles, stéréophonie ; recherche documentaire, indexation et stylistique ; représentation des connaissances musicales, sciences cognitives (U. Eco, D. Kayser) ; représentation des informations imparfaites ; théorie de l'information, entropie (M. Philippot, C. Villani) ; musique contemporaine à prépondérance formelle, musiques concrète et électroacoustique ; musique et cerveau ; etc. !

11. Conclusion

Nombreux sont les mathématiciens de haute valeur, comme J. Dieudonné (Bourbaki), A. Grothendieck ou C. Villani, qui étaient ou sont des mélomanes avertis et enthousiastes. Encore plus nombreux sont les musiciens, comme J.S. Bach, J.Ph. Rameau, B. Bartok, O. Messiaen, I. Xenakis, P. Barbaud, M. Philippot ou P. Boulez qui, sciemment ou non, avaient un esprit et un goût mathématiques. P. Boulez et A. Connes allaient au cœur de la question dans un dialogue *Musique et créativité* (colloque IRCAM 2011) où ils dessinaient un parallèle entre raisonnement mathématique et activité musicale en termes d'intuition et d'élégance.

Il est clair que musique et maths ont de nombreuses affinités, dans leur nature et dans leurs outils. La musique est mathématique par nature, c'est ce qu'exprimaient déjà les Pythagoriciens lorsqu'ils la qualifiaient de « l'art du nombre rendu audible ». Les maths sont inhérentes à la musique : vibrations, consonance, dissonance, modulations, mais aussi équilibre, fonctions des notes dans une tonalité, répétitivité, séquentialité, régularités… sont de nature mathématique.

Vu sous l'angle des maths, toutes leurs branches sont concernées, traitant des nombres mais surtout des formes, structures algébriques, topologie, statistique, analyse, avec des questions de limite, de continuité, de symétrie, d'équilibre, etc. La représentation géométrique des objets musicaux joue un rôle primordial dans leur étude, très présent dans les recherches actuelles ; en effet, ils permettent une approche globalisante qui les situe des uns par rapport aux autres dans divers espaces d'étude, qui permet dans une certaine mesure de manipuler leurs transitions (exemple : le Tonnetz, éventuellement généralisé à plusieurs dimensions) et leurs transformations, et même de les étudier chacun au sujet de ses régularités ou accidents. Mais l'apport essentiel des maths à la musique, c'est la nécessité d'une démarche d'abstraction comme début de l'intervention des maths. Elle est souvent sous-tendue par une volonté de *représentation parcimonieuse*, par exemple remplacer les éléments musicaux par des classes d'équivalence pour certaines propriétés, ce qui réduit fortement la combinatoire pour les étudier. P. Klee enviait la musique qui est mieux tournée vers l'abstraction que la peinture.

Vu sous l'angle de la musique, toutes leurs facettes sont touchées : notation, langage de description, connaissance profonde, évaluation et simulation des lois régissant les sons, harmonie dans ses multiples facettes, aspects temporels, communication pour cerner au plus près l'activité humaine complexe du compositeur et de l'interprète, ressenti, instruments, etc. Intervient souvent le concept *pareil et différent*, qui généralise le rappel. J'ai esquissé l'aide des maths à la définition du beau, beau statique, beau dynamique, beau absolu (nombre d'or), beau circonstanciel, beau physiologique.

Th. Paul explique que musique et maths ont en commun un langage riche, « précis pour les initiés et inintelligible pour les autres [mais que] rigueur et contraintes apparaissent à des instants opposés [...] en musique et en maths : au début pour la 1ère (et relâchée ensuite) et à la fin pour la 2nde (car l'appréhension d'un problème nécessite une liberté souvent peu compatible avec une structure logique préétablie) »[48]. Le compositeur F. Nicolas[49], en philosophe, confirme l'importance de ce langage rigoureux et concis à grand pouvoir métaphorique qui fonde une forte connivence entre ces deux disciplines par la nécessité commune d'une puissante abstraction.

L'informatique a considérablement aidé les mathémusiciens, d'abord en concrétisant les avancées théoriques, mais aussi en soulevant à ce sujet de nouveaux problèmes et de nouveaux besoins d'approfondissement, lançant ainsi une sorte de navette ascendante puissante et actuelle. L'aide à la composition n'est sans doute pas son aspect le plus enthousiasmant, l'écueil étant que le jeu cybernétique prenne plus de place que la créativité et la sensibilité. Mais, avec G. Assayag, on peut affirmer : « Il suffit d'ouvrir les traités anciens, emplis de graphes, de schémas fonctionnels, de calculs numériques, d'algorithmes, pour se convaincre que ces ancêtres eussent adoré avoir un ordinateur à portée de main pour faciliter leurs calculs et expérimenter de nouvelles idées »[50].

Cependant, à n'en pas douter, l'essentiel, c'est la musique et sa beauté, sa dynamique et nos émotions.

Notes

[a] Je ne parlerai pas de l'évolution, au cours de l'histoire, de la hauteur exacte du *la*.

[b] Pourquoi ce nom ? Nous verrons qu'une octave est un intervalle de 8 notes, par exemple do-do ; contrairement à la pratique usuelle dans laquelle s'il y a 3 piquets on dit que l'intervalle est de 2, en musique on compte les extrémités.

[c] Il correspond à la note *mi* si la fondamentale est *la*, à *sol* si la fondamentale est *do*.

[d] Par abstraction, on appelle *échelle* d'une gamme sa charpente, indépendamment de la hauteur où elle se situe ; les échelons s'appelant des *degrés*. Quand il n'y a pas risque d'ambiguïté, on utilise indifféremment *note* et *degré*, gamme et échelle, et même quelquefois *son* et *note*.

[e] Intervient ici la notion de battement que je ne détaillerai pas.

[f] Ils constituent ainsi une suite géométrique de raison 3/2.

[g] L'intervalle entre deux notes consécutives y dépend de la fondamentale !

[h] Manière d'ajuster les hauteurs des notes (étymologie : "juste proportion").

[i] Les fréquences des degrés d'une échelle chromatique tempérée forment ainsi une suite géométrique de raison $\sqrt[12]{2}$.

[j] Notion développée entre autres par Hugo Riemann (1849, 1919), à ne pas confondre avec Bernhard, mathématicien.

[k] On peut remarquer que la gamme mineure dont la tonique est un ton et demi en dessous du 1er degré d'une gamme majeure a la même armure que celle-ci ; on dit que c'est sa gamme mineure *relative*.

[l] Dans une tonalité T, l'accord construit sur les degrés I, III (tierce) et V (quinte) est un accord parfait de T.

[m] Quand cette abstraction est utilisée à propos de la gamme de Pythagore, le bouclage n'est pas parfait, on obtient ainsi la *spirale des quintes*.

[n] Pour ne pas faire trop long, je n'ai pas traité de ce volet important des cours d'harmonie, ni parlé de contour mélodique, de couleurs et ressentis propres aux différentes fonctions et aux différents accords.

[o] Berlioz y excellait, de même que Ravel entre autres, et a d'ailleurs écrit un traité d'orchestration.

[1] Entre autres, un numéro spécial de Pour la Science, Nov 2008, N°373 : "Sons & Musique. De l'art à la science" (grand intérêt général).

[2] Migeot J.L. "Des chiffres et des notes - Quand la science parle à la musique". Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.

[3] Assayag G. et Cholleton J.P. "Musique, Nombre et Ordinateurs". La Recherche. Numéro spécial sur les nombres N° 278, Juillet/Août 1995. cf http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/RMPapers/Assayag95c/.

[4] Rameau J.Ph "Traité de l'harmonie réduite à ses principes naturels" cf http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b86232459/f15.image.

[5] https://fr.wikipedia.org/wiki/Consonance_(harmonie_tonale).

[6] Diderot D. "Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers", Article "Dissonance", p. 729.

[7] Philippot M. "Gamme" In Universalis éducation [en ligne]. Encyclopædia Universalis. Disponible sur http://www.universalis-edu.com/encyclopedie/gamme/.

[8] Hellegouarch Y. (Université de Caen) "Gammes naturelles". SMF Gazette 81, Juillet 1999.

[9] Papadopoulos A. "Consonance musicale et complexité mathématique" cf http://www.reynal.ensea.fr/docs/amea/112_Papadopoulos.pdf.

[10] Hellegouarch Y. Op. cit.

[11] Barraud H. "Tonal (Système)", Encyclopædia Universalis [en ligne],

http://www.universalis-edu.com/encyclopedie/systeme-tonal/.

[12] Amiot E. "Pour en finir avec le Désir". http://chuckydoo.pagesperso-orange.fr/Desir/Desir.htm).

[13] Andreatta M. et Tymoczko D. racontés par Thivent V. "Une musique qui swingue de façon géométrique". Science actualités.fr (Cité des Sciences et de l'Industrie) 2008.

[14] Coulon R. "Maths et musique" (rcoulon.perso.math.cnrs.fr/papiers/musique.pdf) (grand intérêt général).

[15] Andreatta M. "Musique et mathématiques: destinées parallèles ou influences mutuelles ?". Rouen, Centre I. Xenakis 2014 (grand intérêt général).

[16] Amiot E. "Chopin, virtuose de la théorie des groupes ?". http://chuckydoo.pagesperso-orange.fr/HTMLMTL/MTL.html.

[17] Le Mouvement Janáček (pour promouvoir la connaissance de la musique tchèque) "Antonín Dvořák (1841, 1904)". http://mouvementjanacek.free.fr/notice_compositeur.php?id=16.

[18] Levitin D. et Menon V. "Le rythme: une géométrie fractale qui rend la musique agréable". Université McGill. Cité par http://www.techno-science.net/?onglet=news&news=10113.

[19] Heim A. "Qu'est-ce que le Contrepoint ?". Association Rythmes et Harmonies (École de musique à Mulhouse). http://www.rythmes-harmonies.fr/591-quest-ce-que-le-contrepoint.

[20] Bernstein L. "Leçons de maître sur un plateau" 8 émissions de télévision de 1958 à 1970. http://www.liberation.fr/medias/1995/10/03/arte-19h30-leonard-bernstein-concerts-pour-les-jeunes-serie-de-huit-emissions-lecons-de-maitre-sur-u_148123.

[21] Berg A. "Ecrits d'Alban Berg" traduits et commenté par Henri Pousseur. Editions du Rocher, 1957.

[22] Mertzweiller J.Y. "Gammes et théories musicales (La composition musicale)". http://mertzweiller.perso.libertysurf.fr/music.htm.

[23] Rossille F. "Musicalité de l'œuvre plastique de Victor Vasarely". Séminaire Musique et Arts plastiques de l'Observatoire Musical Français, Université Paris IV Sorbonne, 2011. http://frederic-rossille.net/musicalite-vasarely-omf.html.

[24] Papadopoulos A. "Mathématiques et musique chez J.S. Bach". http://numerisation.irem.univ-mrs.fr/ST/IST00019/IST00019.pdf .

[25] Hofstadter D. "Gödel Escher Bach, les Brins d'une Guirlande Eternelle". InterEditions (grand intérêt général).

[26] cité dans http://analyse-musicale-poulenc.pagesperso-orange.fr/Prosodie.htm.

[27] TPE à propos de "Bartok et le nombre d'or". http://tpe-musique.chez-alice.fr/index.htm.

[28] http://classicalliterature.tumblr.com/post/14149074752/debussy-maths-and-the-golden-ratio.

[29] Kundera M. "Prague, poème qui disparaît". Le Débat (n° 2), Gallimard, 06-1980.

[30] Amiot E. "Modèles algébriques et algorithmes pour la formalisation mathématique de structures musicales". Thèse de Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, mai 2010.

[31] Verdeau-Paillès J., Laxenaire M., Stoecklin H. "La folie à l'Opéra". Buchet/Chastel.

[32] Chemillier M."Les mathématiques naturelles". Paris, Odile Jacob, 2007.

[33] Nicolas F. "Le Monde-Musique et son écoute à l'œuvre". Editions Aedam Musicae 2014 (grand intérêt général).

[34] Debussy C. "Monsieur Croche" L'Imaginaire Gallimard.

[35] Rossille F. Op. cit.

[36] Boulez P. "Par volonté et par hasard. Entretiens avec Célestin Deliège". Seuil 1975.

[37] "Bienvenue dans mon monde musical: J.S. Bach et le nombre d'or". http://colinearcenciel.musicblog.fr/r15042/Bach-Jean-Sebastien/43/ .

[38] Debussy Cl. Op. cit.

[39] Cantagrel G. "Le moulin et la rivière, air et variations sur BACH". Fayard.

[40] citée par Baron M. dans "Le contrepoint et l'écriture musicale". http://regardecetrucconar.free.fr/src/solfege/Cours-MB/Ecriture/c-esprit.htm.

[41] Coulon R. Op. cit.

[42] Hofstadter D. Op. cit.

[43] Gardiner J.E. "Musique au château du ciel - Un portrait de Jean-Sébastien Bach". Flammarion, p. 86.

[44] Guillard G. "J.S. Bach et l'orgue". Que sais-je ? PUF.

[45] Charbonnier G. "Art & Mathématique". In Universalis éducation [en ligne]. Encyclopædia Universalis, consulté le 7 mai 2016. Disponible sur http://www.universalis-edu.com/encyclopedie/art-et-mathematique/.

[46] http://www.entretemps.asso.fr/Nicolas/Textes/Boulez.theorie.htm.

[47] Risset J.C. "Hauteur et timbre des sons" Rapport IRCAM 11/78, 1978; et "Composer le son. Écrits, Volume 1: Repères d'une exploration du monde sonore numérique" Hermann 2014.

[48] Paul Th. "Rigueur - Contraintes : Mathématiques - Musique". http://www.cmls.polytechnique.fr/perso/paul/gaz7.pdf.

[49] Nicolas F. "Y a-t-il une connivence singulière entre musique et mathématiques ? Évaluation critique". Bobigny, 2003. http://www.entretemps.asso.fr/Nicolas/TextesNic/Bobigny.html.

[50] Assayag G. et Cholleton J.P. Op. cit.