Discours de réception de Gerhard Heinzmann

Monsieur le Président, Monsieur le Secrétaire perpétuel, chères Consœurs, chers Confrères, Mesdames, Messieurs,

Je suis bien reconnaissant, impressionné et même intimidé de l'honneur que l'Académie de Stanislas m'a accordé en me choisissant comme membre titulaire. Ma première relation avec notre honorable Académie date du mois de mai 1994, lorsque l'Académie internationale de Philosophie des Sciences fut autorisée à tenir son assemblée générale, que j'organisais, dans la salle historique de l'Académie de Stanislas, en présence de savants comme Olivier Costa de Beauregard, Paulette Février, Gilles-Gaston Granger, Bernard d'Espagnat, André Lichnerowitz, René Thom ou Jules Vuillemin.

Je profitais dans les années 1990 de l'ouverture d'esprit et de la générosité intellectuelle et amicale de surtout trois membres de l'Académie de Stanislas auxquels je tiens exprimer aujourd'hui ma gratitude en leur dédiant ce discours :

- M. Guerrier de Dumast devenu un ami familial et paternel qui a aussi bien soutenu en 1996 l'adoption de notre fille au Népal que, en tant que président de la Chambre de commerce, le label philosophie, coordonné par le jeune Laurent Rollet, aujourd'hui notre confrère ;
- M. Larcan grâce auquel les Archives Poincaré pouvaient acheter en 1993 des livres de la bibliothèque personnelle d'Henri Poincaré ;
- et M. Hachet qui nous avait fait confiance pour étudier et classer le fonds du peintre Louis Joly, déposé au musée de Toul, et qui a donné en 2009 aux Archives Poincaré un magnifique toile de Louis Joly en dépôt, document signé par l'adjoint délégué au patrimoine de la ville de Toul, qu'était à l'époque notre confrère Alde Harmand.

Je n'oublie non plus la première coopération avec Jean-Louis Rivail lors du colloque « Un siècle de chimie physique à Nancy » en avril 1999, et je dois souligner l'amitié et la coopération, dès 1985, avec notre consœur Paulette Choné.

J'étais élu membre correspondant en 2001 sous la présidence de M. Paul Sadoul avec le soutien de Monsieur Bonnefont. Mon engagement professionnel en tant que fondateur et directeur de deux unités CNRS, les Archives Poincaré et la MSH-Lorraine, ne me laissait pas le temps de fréquenter assidûment les séances de l'Académie. Cependant, depuis mon éméritat en 2020, cela a bien changé.

Je ne veux pas verser de l'eau dans la rivière et parler dans ce discours sur un sujet concernant l'histoire de la Lorraine à laquelle je suis fort attaché. Non, encouragé par notre confrère Roger Pouivet, je souhaite vous parler de ce qui me passionnait depuis mon mémoire de mathématiques, soutenu à Heidelberg en 1977, et qui me retenait à Nancy, patrie de mon héros, Henri Poincaré, mathématicien et philosophe. Je vous parlerai donc de

L'Interférence entre mathématiques et philosophie

La double vie entre philosophie et mathématiques

Depuis l'antiquité les philosophes se sont interrogés sur le statut des objets et concepts mathématiques et sur la certitude qui l'accompagne. Ceci est particulièrement vrai pour les concepts comme « nombre », « infini », « continu », « espace », « temps », « preuve », etc. Mais la même chose est également vraie pour « le vivant » ou « la justice » se rattachant pourtant à d'autres disciplines que les mathématiques. Or, ce qui me tient à cœur est la question si la réflexion du mathématicien et du philosophe donne à la relation entre mathématiques et

philosophie un statut différent, plus profond, de celle entre philosophie et une autre science particulière. Je vais essayer de donner une réponse affirmative justifiée. Pour cela, il me faut expliquer la métaphore « relation profonde ».

Depuis saint Bonaventure, on connaît le rapprochement entre deux livres, la Bible et la nature, la première étant interprétée par les théologiens, la seconde, selon Pierre Gassendi par les mathématiciens[1]. En effet, les mathématiques sont le moyen le plus efficace à notre disposition d'interpréter la nature, bien que certains critiquent cette mathématisation comme emprise cognitive. Quoi qu'il en soit, toutes les sciences, même la biologie, se sont mathématisées.

Si on admet donc que les mathématiques jouent un rôle indispensable pour la connaissance du monde et si on concède avec le philosophe autrichien Ludwig Wittgenstein que le but de la philosophie est la clarification du discours par l'analyse du sens de nos énoncés, alors l'élucidation du sens du discours mathématique, est paradigmatique pour la théorie de la connaissance. Je me place dans cette perspective et renonce à donner une description sociologique ou historique sur la relation entre les mathématiques et la philosophie, même si, bien sûr, depuis la soi-disant crise des fondements des mathématiques autour de 1900, la discussion sur la philosophie et les mathématiques s'est intensifiée et institutionnalisée, mais n'a pas été ni transformée ni créée.[2] En réalité, on confondait les fondements avec la réduction à la théorie des ensembles au lieu d'entendre sous fondements l'organisation compréhensive des mathématiques.

Le fait que l'élucidation du sens du discours mathématique est une propédeutique pour la philosophie est confirmé dès l'antiquité : « Nul n'entre ici s'il n'est géomètre » était écrit à l'entrée de l'Académie de Platon. Beaucoup de philosophes, de Descartes à Husserl, étaient également mathématiciens, et de grands mathématiciens comme Poincaré ou René Thom engageaient des réflexions philosophiques sur des concepts mathématiques. C'est bien connu et rien de neuf.

De ne rien dire de neuf mais donner la raison du connu est une caractéristique de la philosophie qui se distingue par cela d'autres disciplines *a priori* comme justement les mathématiques. C'était déjà remarqué par saint Augustin et rapporté par Kant et Wittgenstein : « Qu'est-ce que le temps ? Si personne ne me le demande, je le sais ; Si je veux l'expliquer à quelqu'un qui me le demande, je ne le sais plus. Voilà ce qu'on ne pourrait pas dire d'une question posée par la science » (Wittgenstein, 1971, 71). Donc, je ne dirai rien de ce que vous ne savez pas déjà, mais mon intention est de comprendre pourquoi nous savons ce que nous savons.

Le philosophe qui veut comprendre des concepts utilisés en théorie de la connaissance néglige parfois qu'ils sont aussi appliqués avec systématicité en mathématiques : comme « objet abstrait, sa production et sa mode d'existence engendrant la querelle des universaux », « structure », « intuition », « preuve », etc. Par exemple, de ne pas seulement constater et contrôler qu'une preuve est logiquement concluante, mais de comprendre pourquoi elle l'est, est une clarification témoignant de la double vie du mathématicien et du philosophe, un travail qui s'effectue au cœur des deux disciplines. Précisons encore que la tâche du philosophe n'est pas de parler *sur* les mathématiques et leur développement — pour ceci le mathématicien est mieux doté — mais le philosophe clarifie les présuppositions conceptuelles qu'utilise le mathématicien. Bref, le mathématicien qui cherche à comprendre et non seulement à utiliser sa discipline devient philosophe et le philosophe qui veut comprendre les concepts abstraits appliqués aux mathématiques sans être capable de les utiliser en court à l'échec.

---

[1] Armogathe, 2001, 212 ; Gassendi, *op.* IV 66a47-b9.
[2] Cf. Thiel, 1995, 2-3.

Jules Vuillemin dans son œuvre séminal « La Philosophie de l'Algèbre » souligne aussi l'influence des mathématiques sur le contenu et la méthode en philosophie[3] et au XXe siècle, le lien méthodique entre science et philosophie devient programme : en 1914, le philosophe anglais Bertrand Russell souligne que :

> « la seule et unique condition […] requise pour assurer à la philosophie dans un avenir prochain une perfection surpassant tout ce qui a été atteint jusqu'ici par les philosophes, est la création d'une école d'hommes ayant une formation scientifique et des intérêts philosophiques » (1914, p. 242 ; 1960, 187-188 ; Gandon 2024).

Le mathématicien Henri Poincaré, étant un tel scientifique ayant des intérêts philosophiques, précise :

> « Comme l'esprit de finesse est nécessaire à tout le monde [...] on concluera que la culture littéraire est nécessaire aux savants [...]. Seulement on croit généralement qu'ils en ont besoin pour devenir des hommes et non pour devenir des savants ; et c'est là qu'on se trompe » (Poincaré, 1911, 25-26).

Ainsi, l'inclusion des valeurs esthétiques ou éthiques, met en question le modèle traditionnel de l'objectivité scientifique qui se caractérisait par l'acceptation des seules valeurs, appelées alors « épistémiques », comme vérité, exactitude, cohérence, etc.
Dans la suite, je vais analyser la relation privilégiée entre philosophie et mathématiques à l'exemple de la clarification du concept de l'intuition, non pas au sens d'avoir du flair, mais au sens d'un élément nécessaire pour la compréhension d'une preuve et incluant des aspects esthétiques.

Quelle intuition pour la compréhension d'une preuve ?

a) Je commence par considérer la question du côté des mathématiques. Peut-on trouver des symptômes pour distinguer, selon les termes de Descartes, les preuves évidentes ou convaincantes des déductions seulement rigoureuses ? Pour Poincaré, la question était toujours ouverte. Dans son livre *Science et méthode* (1908, 133-134), il remarque :

> « Quand le logicien aura décomposé chaque démonstration en une foule d'opérations élémentaires, toutes correctes, il ne possédera pas encore la réalité tout entière ; et je ne sais quoi qui fait l'unité de la démonstration lui échappera complètement ».

En effet, la formalisation d'une preuve[4] d'un certain degré de complexité — qui commence déjà avec l'usage du raisonnement par récurrence — reste ambiguë[5], et on se trouve dans une situation modale : on pourrait *en principe* formaliser la preuve. Mais que veut dire « en principe » ?

---

[3] « L'occasion du platonisme a été fournie par la découverte des irrationnelles. […] La méthode métaphysique de Descartes emprunte sans discontinuer à l'invention mathématique de la géométrie algébrique ». Et le principe de continuité de Leibniz est [emprunté à l'invention du Calcul infinitésimal » (Vuillemin, 1962, 4-5).

[4] Une preuve formelle fait abstraction de toute référence sémantique. Elle est une liste d'expressions dont les premières sont les prémisses et la dernière la conclusion comme résultat d'application de règles logiques.

[5] Une des raisons est que la relation entre logique et mathématique est floue : dans un raisonnement où un nombre infini de prémisses est essentiel, la logique du second ordre est nécessaire. Puisque la logique du premier ordre n'est pas décidable et celle du second ordre même pas complet, il est difficile de caractériser de manière 'absolue' la logicité (Bostock, 2009, 153-158). La version contemporaine de cette notion, à savoir l'invariance par rapport à *l'isomorphisme potentiel* place la frontière entre la logique et les mathématiques ailleurs que dans la plupart des ouvrages actuels. Une grande partie de l'arithmétique ordinale sera désormais « logique », tandis qu'une grande partie de la logique du second ordre restera en dehors.

Selon Poincaré, la compréhension d'un raisonnement mathématique nécessite un recours à l'intuition[6] qui est un substitut pour sa formalisation « en principe ». Or, à première vue, l'intuition est censée donner une « vision » de quelque chose, c'est-à-dire une manière de paraître qui fait autorité. Mais, en mathématiques, dessiner une fonction continue par une courbe ou affirmer l'axiome de compréhension — disant que tous les éléments ayant une propriété en commun forment un ensemble — est tout à fait intuitif, bien que le mathématicien n'ait aucune croyance vraie, ni dans le dessin d'une courbe, ni dans l'axiome de compréhension qui est en réalité contradictoire.

b) Peut-être des réflexions en philosophie sur l'intuition peuvent nous aider à voir plus clair ! L'origine de la controverse philosophique actuelle sur l'intuition est un bref article de 1963 du philosophe américain Edmund Gettier qui met en doute la définition classique et intuitive de la connaissance comme *croyance vraie et justifiée* pourquoi elle est vraie. L'argumentation de Gettier passe par l'expérience de pensée suivante : je passe dans un champ et je vois trois agneaux. Je dis qu'il y a trois agneaux dans le champ. Il s'agit d'une croyance justifiée par ma perception, et un comptage effectué par plusieurs personnes confirme sa véracité. Il s'agit donc d'une connaissance dans la tradition platonicienne. Mais, il s'avère plus tard que l'un des trois agneaux que j'ai vus était en fait un chien blanc, et le troisième agneau était caché derrière une étable. Ainsi, bien que justifiée et vraie, ma croyance ne semble pas correspondre à notre intuition de ce que c'est une connaissance.

À partir de là, les philosophes qui, depuis des années 1930, avaient négligé l'intuition, « ont commencé à se demander quelles réactions intuitives méritent la confiance et lesquelles devraient être rejetées plutôt qu'accommodées » (Nagel, 2007, 797)[7]. Pour défendre une fonction cognitive de l'intuition, le problème ouvert pour le philosophe est d'utiliser un concept d'intuition qui, dans un équilibre réflexif, corresponde aux caractéristiques nécessaires que l'on attend de lui :

- être une source fondamentale d'évidence ;
- être sujette à correction ;
- être différente de la croyance (l'axiome de compréhension est intuitif même si on ne le croit pas) ;
- être différente de la perception ;
- n'être ni illuminatif ni introspectif ni transcendantale.

L'intuition épistémique

Dans ce dernier chapitre, je vous présente ma solution qui s'oriente à ces exigences mentionnées. Pour les capter, la bonne question est moins « Qu'est-ce que l'intuition ? » que « Quand y a-t-il intuition ? », c'est-à-dire de ne pas se demander ce qu'elle est, mais *ce qu'elle fait*.

---

[6] Elle peut concerner les axiomes utilisés ou/et les règles d'inférence préservant la vérité.

[7] En gros, deux camps s'opposent sur cette question : pour les uns, appelés « naturalistes », l'intuition n'est rien d'autre qu'un horizon préalable d'une justification reposant sur la bonne foi. Une telle intuition n'est ni immédiate ni certaine ni *a priori*. Pour les autres, appelés « antinaturalistes », l'intuition a un caractère véritablement cognitif, bien qu'elle ne soit pas une connaissance mais qu'elle serve, en tant que « donnée *a priori* de la raison », de base essentiellement non empirique à la justification. Chaque camp accuse l'autre de confusion catégorielle dans son rapport à l'intuition. Il est intéressant de noter que cette querelle trouvait déjà un écho en mathématiques 60 ans plus tôt : dans sa conception de la preuve mathématique, Poincaré souligne que l'intuition intellectuelle *a priori* est un élément important de la compréhension d'une preuve mathématique, alors que la méthode d'axiomatique formelle de Hilbert n'exige que l'intuition combinatoire empirique *(Zeichenanschauung)* pour obtenir la rigueur logique. Si l'on dit que Poincaré est anti-naturaliste, il pourrait reprocher à Hilbert le fait que la traduction des preuves mathématiques dans un formalisme logique n'a qu'un caractère modal. D'un autre côté, Hilbert pourrait reprocher à Poincaré de dissimuler avec son concept d'intuition intellectuelle un psychologisme subjectif.

L'idée centrale de ma construction est la suivante (cf. Heinzmann, 2013, chap. III). L'intuition cherchée pour *comprendre* une preuve mathématiquement correcte est identique à celle qui est déjà nécessaire pour l'affirmation de la fiabilité d'une assertion élémentaire. Pour répondre à la question « l'assertion *p* est-elle fiable ? », je propose de déterminer le sens de l'assertion dans un dialogue de questions et de réponses. Ce processus argumentatif se termine par une interaction « condensée ». Mais que signifie une interaction « condensée » ?
Prenons l'exemple de l'assertion « Socrate est sage ». Les questions et réponses dans le dialogue se réfèrent alors au *prédicat «* sagesse de Socrate » pour lequel les interlocuteurs proposent des symptômes comme : « l'argumentation puissante de Socrate », « son humilité », « son comportement vertueux », « sa fermeté » etc. etc... Ces symptômes sont proposés par les intervenants et peuvent fortement variées d'une personne à l'autre. Elles sont toutes soumises et critiquées dans le dialogue. En principe, les mouvements du dialogue sont en nombre indéfini. Pour cette raison il faut finalement prendre la décision spontanée d'interrompre le dialogue lorsque les différences entre les interlocuteurs se sont stabilisées. Cette décision exige une norme à la fois esthétique et cognitive, que j'appelle « intuition épistémique ». En paraphrasant le philosophe américain Nelson Goodman, nous pouvons dire que l'immédiateté de l'intuition devient une question d'interdépendance plutôt qu'une question d'intimité (Heinzmann, 2013, 88).

Or il est évident que ce qui est admis comme type de sagesse peut changer avec le temps, bien qu'il soit assez robuste. Donc[8] l'incomplétude de l'objet abstrait « sagesse » n'est pas seulement épistémique, mais fonctionnelle, tout comme les objets abstraits en mathématiques[9]. Finalement, la fixation dialogique du sens du concept « sagesse de Socrate » permet de décider la vérité de l'assertion « Socrate est sage ».

Je retourne aux mathématiques. C'est la conception opératoire de l'intuition épistémique qui, par des multiples applications en mathématiques, raccorde l'activité mathématique à une forme de compréhension intersubjective aussi nécessaire pour comprendre une assertion. Elle trouve entre autres sa confirmation dans ce « quelque chose d'indéfinissable » que Poincaré postule pour ne pas être seulement convaincu qu'une preuve est vraie, mais pour comprendre pourquoi elle est vraie.

En fait, j'ai étudié des preuves en théorie des nombres et en topologie qui deviennent plus compréhensibles en utilisant l'intuition épistémique[10]. Je termine en vous donnant un exemple élémentaire[11] concernant le sens d'une règle : comment continue la série : *1, 4, 9, 16,…* ? Vous dites peut-être « par 25 » en pensant à $1^2, 2^2, 3^2, 4^2$? Mais je réponds « par 27 », en ajoutant à chaque fois des nombres primes : 1, 1+3, 4+5, 9+7, 16+11 ! Ce n'est que l'interaction condensée de mouvements dialogiques qui peut exemplifier le sens de la règle.

Conclusion

Outre les influences méthodiques des mathématiques sur la philosophie et l'explication des concepts mathématiques fondamentaux par la philosophie, l'intuition épistémique est un autre

---

[8] Sous condition que l'on n'est pas platonicien.

[9] Ainsi un nombre complexe $a + ib$ n'est pas tant quelque chose dont il faut obtenir une représentation mais plutôt une astuce qui permet de résoudre un certain type d'équation.

[10] Par exemple une preuve qui donne une meilleure compréhension de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ grâce au théorème de clôture intégrale (disant que toute racine rationnelle d'un polynôme unitaire à coefficients entiers est nécessairement entière elle-même), des preuves qui concernent la valeur de la somme de la série

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots\ldots \frac{1}{n^2} + \ldots\ldots$$

(la question fut posée dès 1644 par Pietro Mengoli et résolu par le mathématicien suisse Leonhard Euler en 1735) ou des preuves en topologie dans l'œuvre de Poincaré qui raisonnent par exemplification géométrique (cf. Heinzmann, 2022 ; Heinzmann, 2015 ; Heinzmann, 1999).

[11] Cf. par exemple Brown, 2008, 140.

symptôme de la relation profonde entre philosophie et mathématique, indispensable pour la compréhension dans les deux disciplines pour lesquelles l'analyse syntaxique et sémantique du langage utilisé est essentielle. Si mon interprétation se rapproche à l'injonction de Poincaré : « le mathématicien doit travailler en artiste » (Poincaré, 1905, 106), le logicien Gottlob Frege a trouvé une autre formule générale pour fixer la relation entre philosophie et mathématiques : *« Ein Philosoph, der keine Beziehungen zur Geometrie hat, ist nur ein halber Philosoph, und ein Mathematiker, der keine philosophische Ader hat, ist nur ein halber Mathematiker »* (Frege, 1983, 293). Contrairement au scientisme qui opère une séparation stricte entre sciences humaines et sciences de la nature, séparation institutionnalisée par les académies de l'Institut de France, l'Académie de Stanislas est un lieu où cette séparation est mise en perspective par les beaux-arts, les arts musicaux et même le fait religieux.

Je vous remercie de votre attention.

Références

- Armogathe, Jean-Robert. 2001. « La Bible à la croisée des savoirs », *Revue de Théologie et de Philosophie,* 133 (3) : 211-222.
- Bostock, David. 2009. *Philosophy of Mathematics. An introduction.* Chichester : Wiley-Blackwell.
- Brown, James Robert. 2008. *Philosophy of Mathematics.* New York and London : Routledge.
- Folina, Janet. 2024. "Heinzmann on Poincaré on mathematical understanding", à paraître.
- Frege, Gottlob. 1983. *Nachgelassene Schriften,* 2e édition, H. Hermes, F. Kambartel, F. Kaulbach (éds). Hamburg : Meiner.
- Gandon, Sébastien. 2024. *Russell global. Pour une histoire des réceptions de la philosophie analytique*. Paris : Classiques Garnier.
- Gassendi, Pierre. 1645. « *Oratio inauguralis habita in regio parisiensi collegio die novembris XXIII »*, Parisiis : apud Lud. de Heucqueville, (Œuvres complètes (6 vol.) éditées par Henri Louis Habert de Montmor, 1658, IV, 66-73).
- Gettier, Edmund (1963), *"*Is Justified True Belief Knowledge?". *Analysis,* 23, 121–123.
- Hamami, Yacin. 2018. "Mathematical Inference and Logical Inference". *The Review of Symbolic Logic,* 11: 665-704.
- Heinzmann, Gerhard. 1999. "Poincaré on Understanding Mathematics", *Philosophia Scientiae,* 3 (2), 43-60.
- Heinzmann, Gerhard. 2013. *L'intuition épistémique. Une approche pragmatique du contexte de justification en mathématiques et en philosophie*, Paris : Vrin.
- Heinzmann, Gerhard. 2015. "Pragmatism and the Practical Turn in Philosophy of Mathematics: Explanatory Proofs", in E. Agazzi, G. Heinzmann (eds), *Pragmatism and the Practical Turn in Philosophy of Sciences*. Proceedings of the Annual Meeting of the International Academy of the Philosophy of Science, Pont-à-Mousson / France, 10-14 September 2014, Milan : Franco Angeli Editore, 113-129.
- Heinzmann, Gerhard. 2022. "Mathematical Understanding by Thought Experiments", *Axiomathes,* 32 (3), 1-16.
- Lorenz, Kuno. 2010. Zum dialogischen Prinzip in der Philosophie der „Erlanger Schule". In Pierre Edouard Bour, Manuel Rebuschi et Laurent Rollet (éds.), *Construction. Festschrift for Gerhard Heinzmann.* London: College Publications, 477-488.

- Nagel, Jennifer. 2007. “Epistemic Intuitions”. *Philosophy Compass* : 792-819.
- Poincaré, Henri. 1905. *La valeur de la science.* Paris : Flammarion (1970).
- Poincaré, Henri. 1908. *Science et Méthode.* Paris : Flammarion.
- Poincaré, Henri. 1911. *Les Sciences et les Humanités*, Paris : A. Fayard.
- Russell, Bertrand.1914. *Our Knowledge of the External World as a Field for Scientific Method in Philosophy*. London : Open Court.Thiel, Christian. 1995. *Philosophie und Mathematik*, Darmstadt : Wissenschaftliche Buchgesellschaft.
- Vuillemin, Jules. 1963. *La Philosophie de l’Algèbre*. Paris, P.U.F.
- Wittgenstein, Ludwig. 1971. *Philosophische Untersuchungen*. Frankfurt/Main : Suhrkamp.